



Universidad
Técnica de
Cotopaxi

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE COTOPAXI
FACULTA DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA Y APLICADAS
CARRERA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

“DESARROLLO DE UN ALGORITMO MEDIANTE EL SOFTWARE MATLAB PARA
EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LOS TRANSFORMADORES”

Proyecto de Titulación previo a la obtención del Título de Ingeniero Eléctrico en Sistemas de
Potencia

Autor:

Paneluisa Cumbajin Erik Adrian

Tutor:

MsC. Ing. Proaño Maldonado Xavier Alfonso

LATACUNGA – ECUADOR

Julio 2019



DECLARACION DE AUTORIA

Yo **Erik Adrian Paneluisa Cumbajin** declaro ser autor del presente proyecto de investigación: **“DESARROLLO DE UN ALGORITMO MEDIANTE EL SOFTWARE MATLAB PARA EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LOS TRASNFORMADORES.”**, siendo el **MsC. Ing. Xavier Alfonso Proaño Maldonado** tutor del presente trabajo; y eximo expresamente a la Universidad Técnica de Cotopaxi y a sus representantes legales de posibles reclamos o acciones legales.

Además, certifico que las ideas, conceptos, procedimientos y resultados vertidos en el presente trabajo investigativo, son de mi exclusiva responsabilidad.

MsC. Ing. Xavier Alfonso Proaño Maldonado
C.I. 050265642-4

Erik Adrian Paneluisa Cumbajin
C.I. 171895308-4



AVAL DEL TUTOR DE PROYECTO DE TITULACIÓN

En calidad de Tutor del Trabajo de Investigación sobre el título:

“DESARROLLO DE UN ALGORITMO MEDIANTE EL SOFTWARE MATLAB PARA EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LOS TRANSFORMADORES”, de **Paneluisa Cumbajin Erik Adrian**, de la carrera de **Ingeniería Eléctrica**, considero que dicho Informe Investigativo cumple con los requerimientos metodológicos y aportes científico-técnicos suficientes para ser sometidos a la evaluación del Tribunal de Validación de Proyecto que el Consejo Directivo de la Facultad de **Ciencias de la Ingeniería y Aplicadas** de la Universidad Técnica de Cotopaxi designe, para su correspondiente estudio y calificación.

Latacunga, Julio, 2019

El Tutor

Firma

MsC. Ing. Xayier Alfonso Proaño Maldonado

C.I. 050265642-4



APROBACIÓN DEL TRIBUNAL DE TITULACIÓN

En calidad de Tribunal de Lectores, aprueban el presente Informe de Investigación de acuerdo a las disposiciones reglamentarias emitidas por la Universidad Técnica de Cotopaxi, y por la **FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERIA Y APLICADAS**; por cuanto, postulante: **Erik Adrian Paneluisa Cumbajin** con el título de Proyecto de titulación: **"DESARROLLO DE UN ALGORITMO MEDIANTE EL SOFTWARE MATLAB PARA EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LOS TRANSFORMADORES."** ha considerado las recomendaciones emitidas oportunamente y reúne los méritos suficientes para ser sometido al acto de Sustentación de Proyecto.

Por lo antes expuesto, se autoriza realizar los empastados correspondientes, según la normativa institucional.

Latacunga, Julio 2019

Para constancia firman:

Lector 1 (Presidente)

Nombre: MSc. Ing. Jimmy Toaza

CC: 171762106-2

Lector 2

Nombre: MSc. Ing. Rommel Suárez

CC: 180416535-3

Lector 3

Nombre: MSc. Ing. Carlos Pacheco

CC: 050307290-2

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar mis más grandes agradecimientos van dirigidas para aquellas personas que han sido un claro ejemplo de perseverancia y dedicación, a cuyas personas que con su sola presencia fomentan el buen criterio en mi pensamiento y manera de actuar, agradezco profundamente por el apoyo y los consejos brindados hasta el momento a mis padres Segundo Paneluisa y Norma Cumbajin. En segundo lugar deseo agradecer a mi hermano Brandon Paneluisa por tener el carácter de comprenderme en toda mi vida universitaria, por el apoyo brindado y por solo hecho de ser mi hermano. Debo hacer especial hincapié en agradecer a aquellas personas que de una u otra manera han sido de ayuda en mi formación profesional.

DEDICATORIA

Dedico el presente trabajo a aquella persona que ha sido mi principal fuente de inspiración y dedicación, cuya fortaleza inspiraría a más de uno y cuya valentía me ha hecho reflexionar sobre varios aspectos de la vida, esa persona de carácter fuerte y de buen corazón, esa persona que es demasiada buena para este mundo, esa persona con pensamiento de padre y cuyo nombre se define en 4 palabras, Segundo Rafael Paneluisa Chiguano ha sido mi modelo a seguir y la persona a la que más admiro.

Dedico este presente trabajo a ti padre, gracias por corregirme.

ÍNDICE GENERAL

1	INFORMACIÓN GENERAL	1
2.	RESUMEN DEL PROYECTO	1
3.	JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO.....	2
4.	BENEFICIARIOS DEL PROYECTO	3
5.	EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	3
5.1	Descripción del problema.....	3
5.2	Planteamiento del problema	4
6.	OBJETIVOS.....	4
6.1	Objetivo general	4
6.2	Objetivos específicos.....	4
7.	ACTIVIDADES Y SISTEMA DE TAREAS EN RELACIÓN A LOS OBJETIVOS PLANTEADOS	5
8.	FUNDAMENTACIÓN CIENTÍFICO TÉCNICA	6
8.1	Antecedentes.....	6
8.1.1	Que es un transformador	6
8.1.2	Importancia del transformador	7
8.1.3	Clasificación de los transformadores	8
8.1.4	Conversión de energía electromagnética.....	9
8.1.4.1	Relaciones de energía.....	9
8.1.4.2	Permeabilidad e intensidad de campo magnético	11
8.1.4.3	Intensidad de campo magnético	12
8.1.4.4	Bucle de histéresis.....	13
8.1.4.5	Perdidas en el cobre y corrientes parasitas.....	17
8.1.5	Principios de funcionamiento.....	18
8.1.6	Funcionamiento de un transformador ideal.....	20
8.1.6.1	Polaridad sustractiva	22

8.1.6.2	Polaridad aditiva.....	24
8.1.7	Funcionamiento de un transformador real	25
8.1.7.1	Polaridad sustractiva	27
8.1.8	Circuito equivalente de un transformador.....	29
9.	VALIDACIÓN DE LAS PREGUNTAS CIENTIFICAS O HIPOTESIS	32
10.	ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS	32
10.1	Modelo matemático del transformador	32
10.1.1	Ecuaciones de estado del transformador	32
10.2	Incorporación de la carga en el secundario del transformador.....	37
10.2.1	Carga inductiva-Resistiva	38
10.2.2	Carga capacitiva-Resistiva.....	43
10.3	Incorporación de la saturación al núcleo	45
10.3.1	Armónicos de la corriente de vacío.....	54
10.3.2	Comportamiento del flujo magnético del núcleo	56
10.3.2.1	Comportamiento del flujo magnético sin saturación.....	56
10.3.2.2	Comportamiento del flujo magnético con saturación.....	57
10.3.2.3	Comportamiento del transformador saturado bajo carga	60
10.4	Análisis de la corriente Inrush del transformador	63
10.4.1	Corriente inrush caso no saturado	69
10.4.2	Corriente inrush caso saturado	70
10.5	VALIDACIÓN DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN.....	71
11.	IMPACTOS (TÉCNICOS, SOCIALES, AMBIENTALES O ECONOMICOS).....	73
12.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	73
13.	BIBLIOGRAFÍA	75

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 8.1 Transformador tipo núcleo.....	7
Figura 8.2 Transformador tipo acorazado.	7
Figura 8.3 Esquematación de un sistema electromecánico.	9
Figura 8.4 Diagrama de un sistema electromecánico.	11
Figura 8.5 Curva de magnetización de un material ferromagnético.	13
Figura 8.6 Proceso en la formación de la curva de histéresis en materiales ferromagnéticos.	15
Figura 8.7 Curva de histéresis de una chapa de metal típica.....	16
Figura 8.8 Bucle de histéresis.....	17
Figura 8.9 Núcleo magnético con una bobina enrollada.	19
Figura 8.10 Esquematación de un transformador monofásico.	20
Figura 8.11 Diagrama de un transformador real.	26
Figura 8.12 Circuito eléctrico equivalente de un transformador sin pérdidas.....	31
Figura 8.13 Circuito equivalente del transformador.....	31
Figura 10.1 Diagrama de bloques para un transformador monofásico.	36
Figura 10.2 Circuito equivalente del transformador.....	37
Figura 10.3 Diagrama de bloques de un transformador con carga inductiva y resistiva.....	39
Figura 10.4 Corriente primaria y secundaria del transformador.	40
Figura 10.5 Voltaje primario y secundario del transformador.	41
Figura 10.6 Voltajes y corrientes del transformador con carga Inductiva-Resistiva.	41
Figura 10.7 Voltaje y corriente con carga mediante funciones de transferencia.....	42
Figura 10.8 Diagrama de bloques de un transformador con carga Inductiva Resistiva.	44
Figura 10.9 Diagrama de bloques Capacitiva-Resistiva.....	45
Figura 10.10 Curva de circuito abierto.....	47
Figura 10.11 Variación de la Permeabilidad a lo largo de la curva de Magnetización.	49
Figura 10.12 Incorporación de la saturación al diagrama del transformador.....	50
Figura 10.13 Curva de la reactancia mutua para la saturación del transformador.	50
Figura 10.14 Diagrama de bloques del transformador con saturación incorporada.	52
Figura 10.15 Parámetros a introducir en el diagrama de la figura 10.12.	53
Figura 10.16 Corriente primaria y secundaria del transformador con saturación.	53
Figura 10.17 Corriente de excitación, en diferentes niveles de densidad de flujo, B.	54
Figura 10.18 Corriente de excitación del transformador con saturación trabajando en vacío.....	55
Figura 10.19 Análisis de armónicos a la corriente de excitación de la figura 10.18.....	55

Figura 10.20 Componentes armónicos relativos a la frecuencia fundamental.....	56
Figura 10.21 Incorporación del bloque del flujo magnético en un transformador no saturado.	58
Figura 10.22 Grafica de voltaje, corriente y flujo mutuo en un transformador sin carga no saturado.....	59
Figura 10.23 Graficas de voltaje, corriente y flujo mutuo en un transformador sin carga saturado.....	61
Figura 10.24 Graficas de voltaje secundario, corrientes primaria y secundaria en un transformador con carga saturado.....	62
Figura 10.25 Corrientes de excitación saturadas de un transformador alimentado con voltajes a diferentes ángulos.	66
Figura 10.26 Diagrama de bloques para la corriente inrush.....	68
Figura 10.27 Voltaje primario con corriente Inrush y voltaje primario sin corriente Inrush. .	69
Figura 10.28 Corriente Inrush primaria.....	69
Figura 10.29 Corriente primario inrush con nucleo saturado.....	70
Figura 10.30 Diagrama de bloques para la corriente inrush con núcleo saturado.....	70
Figura 10.31 Esquema de un transformador trifásico en MATLAB/SIMULINK.	72

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 10.1 Datos de un transformador estándar	40
Tabla 10.2 Datos de la carga Inductiva-Resistiva del transformador.	41
Tabla 10.3 Errores de voltaje y corriente mediante dos métodos diferentes.	43
Tabla 10.4 Reactancia mutua en un transformador saturado.....	51
Tabla 10.5 Datos de un transformador trifásico con carga Inductiva-Resistiva.....	71
Tabla 10.6 Datos de un transformador trifásico con carga Inductiva-Resistiva.....	71
Tabla 10.7 Comparación de los datos de las tablas 10.5 y 10.6.	73

SIMBOLOGIA

W_E	Energía de una fuente eléctrica, Joule
W_e	Energía útil de un sistema eléctrico, Joule
W_{eL}	Perdidas eléctricas, Joule
W_{eS}	Energía de un campo electromagnético, Joule
W_M	Energía de una fuente mecánica, Joule
W_m	Energía útil de un sistema mecánico, Joule
W_{mL}	Perdidas mecánicas, Joule
W_{mS}	Energía almacenada de un sistema mecánico, Joule
W_F	Energía transferida, Joule
W_f	Energía almacenada en el campo de acoplamiento, Joule
W_{fL}	Energía disipada en forma de calor, Joule
μ_0	Permeabilidad del vacío
B	Campo Magnético, Tesla
I	Intensidad de corriente continua, Amperios
μ	Permeabilidad
H	Intensidad de campo magnético, Amperios-Vuelta por metro
μ_r	Permeabilidad relativa
P_h	Potencia disipada del bucle de histéresis, Watt
f	Frecuencia, Hertz
B_{\max}	Densidad de flujo máxima
P_e	Potencia disipada debido a las corrientes parasitas, Watt
\mathfrak{F}	Fuerza magnetomotriz, Amperios-Vuelta
\mathfrak{F}_c	Fuerza magnetomotriz con carga, Amperios-Vuelta
\mathfrak{F}_l	Fuerza magnetomotriz de dispersión, Amperios-Vuelta
\mathfrak{F}_m	Fuerza magnetomotriz mutua, Amperios-Vuelta
Φ	Flujo magnético, Webers
Φ_{\max}	Flujo magnético máximo, Webers
Φ_l	Flujo de dispersión, Webers

Φ_m	Flujo mutuo, Webers
λ	Enlace de flujo
λ_m	Enlace de flujo mutuo
λ_{\max}	Enlace de flujo máximo
λ_R	Enlace de flujo residual
λ_{R_0}	Enlace de flujo residual existente
ψ_m	Flujo mutuo
N	Numero de vueltas del bobinado
\mathfrak{R}	Reluctancia, Amperios-Vuelta/ Webers
\mathfrak{R}_l	Reluctancia de dispersión, Amperios-Vuelta/ Webers
\mathfrak{R}_m	Reluctancia mutua, Amperios-Vuelta/ Webers
$v(t)$	Voltaje senoidal, Voltios
v_{l1}	Voltaje de dispersión, Voltios
v_m	Voltaje mutuo, Voltios
v_{\max}	Voltaje máximo, Voltios
v_{lR_0}	Voltaje generado por el flujo preexistente, Voltios
$v_{l_{mIN}}$	Voltaje primario para simular la corriente Inrush, Voltios
V_{RN}	Voltaje a tierra, Voltios
$i(t)$	Corriente senoidal, Amperios
w	Velocidad angular, rad/s
e_1	Voltaje inducido primario, Voltios
e_2	Voltaje inducido secundario, Voltios
a	Relación de transformación
I_0	Corriente de magnetización, Amperios
I_1	Corriente primaria, Amperios
I_2	Corriente secundaria, Amperios
I_{loss}	Corriente de perdidas, Amperios
L_l	Inductancia de dispersión o perdidas, Henrios

L_m	Inductancia mutua, Henrios
x	Reactancia inductiva, Ohm
x_l	Reactancia de dispersión o perdidas, Ohm
x_m	Reactancia mutua, Ohm

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE COTOPAXI
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA Y APLICADAS

**TITULO: “DESARROLLO DE UN ALGORITMO MEDIANTE EL SOFTWARE
MATLAB PARA EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LOS
TRANSFORMADORES.”**

Autor: Erik Adrian Paneluisa Cumbajin

RESUMEN

El trabajo presente muestra el diseño de un transformador eléctrico mediante modelos matemáticos con el cual se modela las características principales de la misma, los resultados abordados se acercan a los de un transformador real. Se puede simular varios elementos característicos de la máquina eléctrica, tal es el caso de la saturación característica del transformador, en donde se tomó para la realización de la misma la variación de la reactancia mutua del transformador. El modelo presente puede ser editado agregando nuevos sub-sistemas como es el caso de la simulación de la corriente Inrush, en donde con solo acoplar el sub-sistema con el mismo nombre al transformador se obtiene las gráficas características de dicho fenómeno. El modelo presente además puede ser conectado como un banco trifásico a partir de bancos monofásicos y simularlos añadiendo las conexiones trifásicas conocidas. Se puede además obtener las conexiones especiales de los transformadores, tal es el caso de los autotransformadores, en donde con solo aplicar simples bloques matemáticos se obtienen los datos característicos de este tipo de máquina. Todo lo anterior se resume en la obtención de gráficos y datos que se asemejan a los de un transformador real, evitando así los altos costos en lo referente a la obtención de un transformador real.

Palabras claves: Transformador, Simulación, Inrush, Saturación.

COTOPAXI TECHNICAL UNIVERSITY

FACULTY OF ENGINEERING AND APPLIED SCIENCES

TOPIC: "DEVELOPMENT OF AN ALGORITHM THROUGH MATLAB SOFTWARE FOR THE STUDY OF BEHAVIOR OF TRANSFORMERS."

Author: Erik Adrian Paneluisa Cumbajin

ABSTRACT

The present work shows the design of an electric transformer through mathematics models which was used to model the main characteristics of the machine, the showed results are similar to a real transformer. It is possible to simulate many own elements of the electric machine, such is the case that it's possible to simulate the saturation of transformer, where the saturation was taken to do through the variation of mutual reactance of the transformer. The present model can be edited adding news sub-systems as in the case of the simulation of inrush current, where it's possible to add a sub-system which name is the same that was already mentioned and where it gets graphics that shows the phenomenon mentioned previously. The present model can be used as a three-phase transformer through of single-phase transformers and it's possible to simulate it adding the known three-phase connections. It can get the special connections of the transformers too, such is the case of the autotransformers, and where only inserting simple mathematical blocks it's possible to get the characteristic data of this type of machine. All of the above is summarized in obtaining graphics and data that resemble those of a real transformer, thus avoiding the high costs in relation to obtaining a real transformer.

Key words: Transformer, Simulation, Inrush, Saturation.



Universidad
Técnica de
Cotopaxi

CENTRO DE IDIOMAS

AVAL DE TRADUCCIÓN

En calidad de Docente del Idioma Inglés del Centro de Idiomas de la Universidad Técnica de Cotopaxi; en forma legal **CERTIFICO** que: La traducción del resumen del Proyecto de Investigación al Idioma Inglés presentado por el señor: ERIK ADRIAN PANELUISA CUMBAJIN cuyo título versa: “**DESARROLLO DE UN ALGORITMO MEDIANTE EL SOFTWARE MATLAB PARA EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LOS TRANSFORMADORES.**” lo realizo bajo mi supervisión y cumple con una correcta estructura gramatical del Idioma.

Es todo cuanto puedo certificar en honor a la verdad y autorizo al peticionario hacer uso del presente certificado de la manera ética que estime conveniente.

Latacunga, Julio del 2019

Atentamente,

.....
Marco Paúl Beltrán Semblantes

DOCENTE CENTRO DE IDIOMAS

C.I. 050266651-4



1 INFORMACIÓN GENERAL

Título del proyecto

Desarrollo de un algoritmo mediante el software Matlab para el estudio del comportamiento de los transformadores.

Fecha de Inicio: 30 de Octubre del 2018.

Fecha de Finalización: 26 de Junio del 2019.

Lugar de ejecución: Barrió San Felipe- Cantón Latacunga- Provincia de Cotopaxi- Zona 3 de la Universidad Técnica de Cotopaxi.

Facultad de auspicia

Facultad de ciencias de la Ingeniería y Aplicadas.

Carrera que auspicia: Carrera de Ingeniería Eléctrica.

Proyecto de investigación vinculado: Este proyecto se encuentra vinculado al ámbito académico y profesional con el fin de adquirir nuevos o mejorar conocimientos.

Equipo de trabajo:

MSc. Ing. Xavier Alfonso Proaño Maldonado.

Erik Adrian Paneluisa Cumbajin.

Área de Conocimiento

Máquinas eléctricas.

Línea de investigación:

Conversión y uso racional de la energía eléctrica.

Sublínea de la investigación de la carrera de ingeniería eléctrica:

Eficiencia energética y desarrollo sostenible.

2. RESUMEN DEL PROYECTO

A través del uso del potencial que ofrece las matemáticas, se pueden obtener modelamientos físicos, para posteriormente estudiar su comportamiento, estos modelos en la vida cotidiana o laboral son de mucha utilidad para estudiar comportamientos futuros de dichos modelos. Dentro

del campo de las máquinas eléctricas los transformadores son de gran importancia, ya que son el punto de conexión entre dos diferentes niveles de tensión.

Estas máquinas en la actualidad son estudiadas de diferentes maneras, para lo cual se utilizan diferentes herramientas. Este software será capaz de analizar datos de transformadores reales, los cuales son introducidos dentro del software, mediante el algoritmo matemático se analizarán los datos y se obtendrán resultados que se aproximen a los de un transformador real, esto es de gran utilidad en el estudio del comportamiento de la máquina en cuestión.

3. JUSTIFICACIÓN DEL PROYECTO

Las empresas en la actualidad lidian con problemas que comprenden el ámbito económico y laboral, dentro del ámbito económico se encuentra el consumo de energía que las máquinas eléctricas usan para el desarrollo de su producto o trabajo final. Un estudio detallado sobre el sistema eléctrico garantiza una reducción de magnitud en la tasa de consumo de energía mensual.

Dentro de dicho estudio se realizan estudios sobre el comportamiento de las máquinas eléctricas dentro de la empresa, entre ellas el transformador, el cual es el encargado de transformar voltajes y corrientes para determinados tipos de carga conectadas a ella.

Un estudio detallado del transformador podría ayudar a prevenir eventos no deseados o a conocer lo que sucedería si se conectan ciertos tipos de carga, y como se vería afectado la vida útil del transformador.

Todo lo anterior se lo realizaría mediante la simulación de la máquina eléctrica en cuestión. En la actualidad existen ya varias herramientas para modelamiento de máquinas eléctricas, sin embargo los costos altos de las mismas dejan fuera la idea de incorporarlas a un sistema de estudio como es el caso de las universidades.

Es por ello necesario que el estudiante tenga al alcance una herramienta que le permita realizar prácticas teóricas y conocer el funcionamiento del transformador en ciertas circunstancias sin la necesidad de acudir a las máquinas reales, ya que las mismas no están al alcance debido a sus altos costos sin mencionar las herramientas de medición las cuales se encuentran a un costo similar.

Gracias al desarrollo matemático, el modelamiento de un transformador eléctrico nos proporciona un acercamiento a la máquina real, ya que las herramientas matemáticas ayudan a obtener datos que se acercan a los que se obtendrían en una máquina real.

El algoritmo se introducirá en el software Matlab, una herramienta con la que los estudiantes de ingeniería se encuentran familiarizados. En el análisis de este tipo de maquina se pueden desprender algunos temas de interés, sin embargo el conocer su principio de funcionamiento puede ayudar a desarrollar algunas aplicaciones particulares que pueden ser de gran ayuda en el campo laboral de la ingeniería eléctrica, principalmente en el ámbito de la generación y distribución de la misma.

4. BENEFICIARIOS DEL PROYECTO

A través del desarrollo del algoritmo los beneficiarios en su mayoría serán los estudiantes de la carrera de Ingeniería eléctrica. Debido a que el diseño del algoritmo somete cálculos matemáticos complejos, en su mayoría los beneficiarios serán aquellos estudiantes que cursen el último curso de matemáticas avanzadas, además de que para el diseño del mismo se necesita del conocimiento de circuitos eléctricos, y los beneficiarios serán también los estudiantes que cursen la materia de circuitos eléctricos.

Para llevar el modelamiento matemático del transformador a MATLAB se necesita del conocimiento de la formulación de ecuaciones de estado, con lo cual se da beneficio a los estudiantes que cursen la materia de Sistemas de Control, todo lo anterior se resume en el funcionamiento del transformador eléctrico por lo que se abren ramas referentes a la materia de Maquinas eléctricas, dentro de ella también abarcan otros temas de interés como son cálculos de fallas etc., por lo que los beneficiarios serán aquellos estudiantes que cursen las materias de Maquinas Eléctricas y Protecciones Eléctricas.

5. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

5.1 Descripción del problema

La industria en la actualidad fomenta su estabilidad en base al trabajo de las máquinas eléctricas, las mismas que ayudan al incremento de la eficiencia en el desarrollo y realización de los productos. Entre las diversas máquinas existentes, el transformador es uno de las principales que ha fomentado el crecimiento inmensurable de la industria, sus bases han sido el inicio de la creación y modelamiento de otras máquinas similares, por lo cual su comportamiento es muy estudiado en la actualidad, tanto para la mejorar su eficiencia y para minimizar costos en su construcción. Una de las principales características de los transformadores surge en la conversión de voltaje y corriente manteniendo una potencia casi constante, siempre y cuando

se hable de un transformador real, los fenómenos tanto eléctricos como magnéticos son de gran interés para el estudiante que inicia en el estudio de dichas máquinas.

Debido al que en la actualidad el estudio de las máquinas reales está limitado al costo de las herramientas tanto de medición como el costo del mismo transformador, resulta complicado para el estudiante conocer más a profundidad todas las características principales de la máquina eléctrica, las grandes industrias a menudo necesitan realizar procesos de mantenimiento en sus transformadores e incluso conocer el comportamiento del mismo ante algún evento no planeado.

El tener una herramienta que permita simular dichos eventos ayuda a la prevención de eventos fortuitos dañinos para la vida útil del transformador, además de que aporta una herramienta para incrementar el conocimiento tanto del estudiante como de la persona interesada en el tema.

5.2 Planteamiento del problema

El estudio de las máquinas eléctricas se ve limitado debido a los costos elevados que existen tanto en herramientas de medición como el de la máquina misma.

6. OBJETIVOS

6.1 Objetivo general

Desarrollar un algoritmo matemático mediante el software Matlab que permita analizar el comportamiento de los transformadores eléctricos.

6.2 Objetivos específicos

- a) Desarrollar el modelo matemático del transformador.
- b) Incorporar las ecuaciones matemáticas al software Matlab.
- c) Analizar el comportamiento de la simulación del transformador incorporando casos prácticos.

7. ACTIVIDADES Y SISTEMA DE TAREAS EN RELACIÓN A LOS OBJETIVOS PLANTEADOS

Objetivos	Actividades	Resultados de la actividad	Medios de verificación
Desarrollar el modelo matemático del transformador	Desarrollar las ecuaciones de estado del transformador	Obtención de las ecuaciones de estado en función de las corrientes de, transformador	Sección 10.1.1 de este informe
	Obtener las ecuaciones de estado para cualquier tipo de carga que sea conectado al transformador	Obtención de las ecuaciones para cualquier tipo de carga teniendo la corriente secundaria como entrada y el voltaje secundario como salida	Sección 10.2 de este informe
	Desarrollar el modelo matemático de la curva de saturación del transformador	Se obtuvo una onda senoidal con valores no negativos	Figura 10.13
Incorporar las ecuaciones matemáticas al software Matlab	Desarrollar el diagrama de bloques con las ecuaciones del transformador	Obtención del modelo del transformador.	Figura 10.1
	Incorporar las ecuaciones de estado de la carga del transformador	Se modelo el transformador con carga Inductiva-Resistiva	Figura 10.3
	Incorporar las ecuaciones de saturación del transformador	Se obtuvo la corriente primaria saturada característica	Figura 10.16
Analizar el comportamiento del transformador incorporando casos prácticos	Incorporación de la corriente inrush en el transformador	Se obtuvo la corriente primaria inrush característica	Figura 10.25 y 10.28 y 10.29
	Realizar un Manual	Se realizó un manual de usuario	Anexo 1
	Realizar una guía de laboratorio	Se realizaron tres practicas	Anexo 2

8. FUNDAMENTACIÓN CIENTÍFICO TÉCNICA

8.1 Antecedentes

8.1.1 Que es un transformador

El transformador eléctrico desde sus inicios es quizás uno de los dispositivos eléctricos más útiles en el ámbito de la ingeniería eléctrica y otras carreras afines. Entre sus principales características se denota la capacidad de aumentar o disminuir el voltaje o corriente de un circuito de corriente alterna, además de que también aísla circuitos entre sí [1]. Esto ha conllevado por lo tanto a un avance significativamente alto dentro de las industrias en los últimos años, la importancia de este dispositivo o máquina eléctrica, radica en disminuir las pérdidas que se ejercen al momento de transportar la energía eléctrica de un punto a otro, en donde la distancia supera los cientos de *km*.

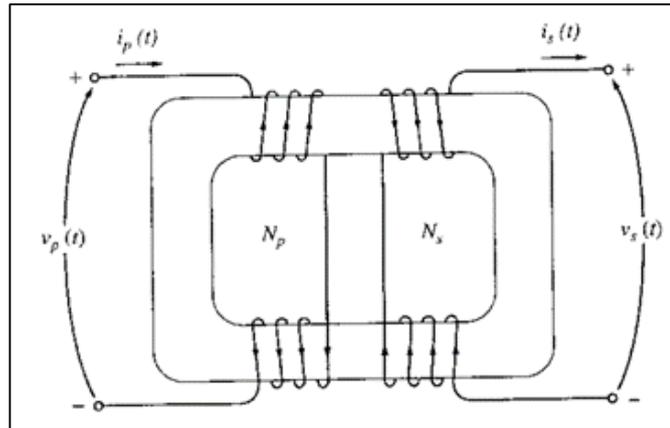
Dentro de las características de un transformador básico se denota dos devanados los cuales se encuentran mutuamente acoplados, en algunos casos se los denomina acoplamiento magnético [2], ya que pueden estar acoplados mediante un material ferromagnético el cual concentra mejor las líneas de flujo [3], o puede estar acoplado mediante el aire libre, cuya permeabilidad resulta ser muy baja para casos prácticos [4]. En definitiva se puede definir al transformador como un dispositivo electromagnético estacionario o estático, por medio del cual la potencia en un circuito es transformado en potencia eléctrica de la misma frecuencia en otra parte del circuito [5].

Los transformadores se construyen de diferentes maneras. Un transformador consta de una pieza de acero rectangular, la cual esta laminada y los devanados se encuentran enrollados sobre dos de los lados del rectángulo. Esta clase de construcción es conocida como transformador tipo núcleo, y se puede apreciar en la figura 8.1.

Otro tipo de construcción consta de un núcleo laminado de 3 columnas, en donde las bobinas se encuentran enrolladas en la columna central. Esta clase de construcción es conocida como transformador tipo acorazado [6], y se puede apreciar en la figura 8.2. En un transformador físico los dos devanados, primario y secundario se encuentran envueltos uno sobre el otro con el devanado de bajo voltaje en la parte interna, para que se encuentre más cerca del núcleo. Esto se debe a lo siguiente:

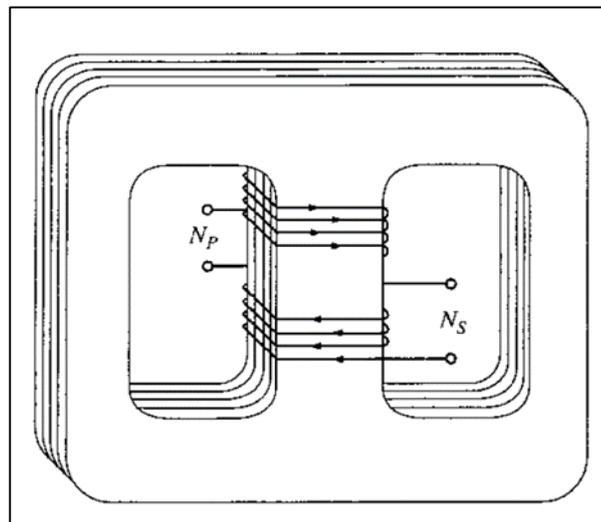
- a) Simplifica el problema de aislar el devanado de alta tensión desde el núcleo.
- b) Produce un menor flujo disperso, ya que el mismo es aprovechado en cierto punto.

Figura 8.1 Transformador tipo núcleo.



Fuente: [6].

Figura 8.2 Transformador tipo acorazado.



Fuente: [6].

8.1.2 Importancia del transformador

Como se mencionó anteriormente los transformadores son de gran utilidad, no solo en las industrias, ya que existen varios ámbitos en los cuales dichas máquinas atenúan el trabajo y mejora drásticamente la eficiencia del mismo. Desde la generación hasta la distribución los transformadores son los encargados de unir dos circuitos, por lo que a menudo se los denomina como nodo de interconexión para dos puntos de diferentes niveles de tensión [7].

El primer sistema de distribución que se utilizó fue en Estados Unidos el cual contaba con el uso de corriente directa a 220 V y fue desarrollado por Thomas Alva Edison, el cual suministraba potencia a bombillas incandescentes. La primera central entró en operación en la ciudad de New York en septiembre de 1882. Debido a que en aquella época se tenía total desconocimiento

sobre el uso de la corriente alterna el sistema de corriente continua se transmitía a muy bajos voltajes, lo cual conlleva a un transporte elevado de corriente para suplir la demanda requerida, esto a su vez ocasiona pérdidas de potencia a lo largo de la línea, por lo que inmediatamente algunas zonas quedaron sin servicio eléctrico en especial las zonas más pobres de aquella época [6]. La invención del transformador y el desarrollo simultáneo de las fuentes de potencia alterna, eliminaron para siempre las restricciones que abarcaba el sistema de transmisión con corriente directa.

8.1.3 Clasificación de los transformadores

Se puede clasificar a los transformadores en varios tipos, dependiendo del uso o la acción para la que se los fabricó, se tiene entonces dos tipos de transformadores por la acción que realizan, ya sean transformadores elevadores o reductores.

Dentro del estudio de los transformadores siempre a menudo se habla de los devanados primarios, secundarios y en algunos casos terciarios, se denomina devanado primario al devanado que está conectado al nivel de voltaje o fuente de suministro de energía, y se denomina devanado secundario al devanado que se encuentra conectado a la carga respectivamente [6]. Se los puede clasificar también como transformadores de potencia y como transformadores de distribución en donde la frase sistemas de potencia se refiere a la cadena desde la estación de generación al primer punto de distribución y la frase sistema de distribución significa la cadena subsecuente al punto final de distribución [8].

Desde el punto de vista de uso, los siguientes transformadores son los más mencionados e importantes [5].

- **Transformadores de potencia:** Estos transformadores son usados para la transmisión y distribución de potencia.
- **Auto-transformadores:** Estos transformadores son usados para cambiar el voltaje en relativamente pequeños límites y son usados para iniciar motores AC y así sucesivamente.
- **Transformadores para instalaciones alimentadas con convertidores estáticos:** Estos son usados para convertir corriente AC a DC y además corriente DC a AC, el primero caso es para la utilización en rectificadores y el segundo caso es para propósitos de inversión en motores eléctricos.
- **Transformadores para pruebas:** Son usados para conducir pruebas a altos y ultra altos voltajes.

- **Transformadores de potencia para aplicaciones especiales:** Son usados en hornos, para soldadura etc.
- **Transformadores de radio:** Son usados en la ingeniería de radios y propósitos similares.

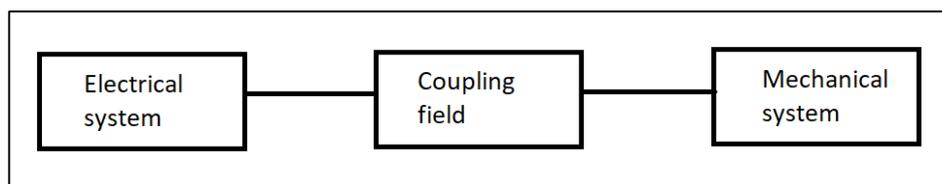
8.1.4 Conversión de energía electromagnética

8.1.4.1 Relaciones de energía

Dentro del transformador el comportamiento se caracteriza por la existencia de un campo tanto eléctrico como magnético al cual se lo define como un campo electromagnético. Para entender lo que sucede dentro del transformador es necesario conocer el comportamiento de los sistemas electromecánicos, el cual está formado por un sistema eléctrico y mecánico respectivamente. Estos dos tipos de sistemas se encuentran acoplados a través del campo electromagnético, el cual sirve como un enlace para transformar un tipo de sistema en otro. La interacción de estos sistemas puede tomar lugar a través de una parte o de todo el campo eléctrico y magnético la cual es común en ambos sistemas [2], y la energía es transferida desde un sistema a otro. Ya que ambos campos eléctrico y magnético pueden existir simultáneamente, el sistema eléctrico y magnético puede tener cualquier número de entradas o salidas.

En la figura 8.3 se puede observar un claro ejemplo de un sistema electromecánico con un sistema eléctrico y mecánico y un acoplamiento entre ellos.

Figura 8.3 Esquematación de un sistema electromecánico.



Fuente: [2].

Ya que las pérdidas son inevitables en cualquier sistema, se deben tomar en cuenta para su desarrollo matemático. Dentro del sistema mecánico ocurren pérdidas por calor, al igual que en el sistema eléctrico debido a las pérdidas en el cobre, las pérdidas en el núcleo también ocurren dentro del sistema eléctrico, mientras que las pérdidas dieléctricas ocurren en todos los campos eléctricos. Si W_E es la energía total suministrada por la fuente eléctrica y W_M es la energía total suministrada por la fuente mecánica, la distribución de energía puede ser expresada de la siguiente manera.

$$W_E = W_e + W_{eL} + W_{eS} \quad (8.1a)$$

$$W_M = W_m + W_{mL} + W_{mS} \quad (8.1b)$$

Donde:

W_{eS} Es la energía almacenada en el campo eléctrico o magnético que no están acopladas con el sistema mecánico (watt hora).

W_{eL} Son las pérdidas por calor asociadas con el sistema eléctrico (joule).

W_e Es la energía transferida al campo de acoplamiento (joule).

W_{mS} Es la energía almacenada en el miembro móvil del sistema mecánico (joule).

W_{mL} Son las pérdidas por calor asociadas con el sistema mecánico (joule).

W_m Es la energía transferida al campo de acoplamiento (joule).

Se debe notar que la energía suministrada puede adoptar cualquier dirección ya sea el caso que un sistema sea una fuente de entrada y otra sea la energía resultante. En dicho caso se debe tener en cuenta el signo, ya que si un sistema es una entrada llevara el signo positivo, de lo contrario llevara el signo negativo.

Si W_F es la energía total transferida al acoplamiento de campo, entonces:

$$W_F = W_f + W_{fL} \quad (8.2)$$

Donde

W_f Es la energía almacenada en el campo de acoplamiento (joule).

W_{fL} Es la energía disipada en forma de calor que se da en el núcleo del transformador (joule).

Al ser este un sistema electromecánico, debe obedecer la ley de conservación de la energía, de ese modo:

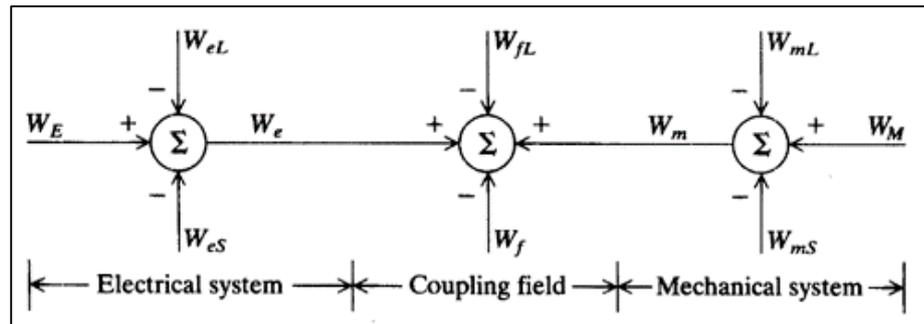
$$W_f + W_{fL} = W_e + W_m$$

Que es igual a:

$$W_f + W_{fL} = (W_E - W_{eL} - W_{eS}) + (W_M - W_{mL} - W_{mS}) \quad (8.3)$$

La ecuación 8.3 se puede esquematizar de la siguiente manera, tal y como se muestra en la figura 8.4.

Figura 8.4 Diagrama de un sistema electromecánico.



Fuente: [2].

Analizando la figura anterior se puede notar que para pasar de un sistema a otro, o que se dé la conversión de un sistema eléctrico a un sistema mecánico o viceversa el sistema es independiente de lo siguiente:

- Las pérdidas de energía por efecto de calor tanto en el sistema eléctrico y magnético (W_{eL}, W_{mL})
- La energía almacenada tanto en el sistema eléctrico y magnético (W_{eS}, W_{mS})

Si ignoramos las pérdidas en el campo de acoplamiento, entonces el campo es conservativo por lo que la ecuación 8.3 se convierte en:

$$W_f = W_e + W_m \quad (8.4)$$

Si en la ecuación anterior se tiene en lugar de un sistema mecánico otro sistema eléctrico, se puede analizar en comportamiento básico de un transformador, con la diferencia que dicho sistema puede variar en algunos valores y no ser exactamente igual al sistema eléctrico en cuestión.

8.1.4.2 Permeabilidad e intensidad de campo magnético

Como se ha visto anteriormente una de las principales características del transformador es su acoplamiento magnético, el cual ayuda a la conversión de energía, esto existe gracias a que en su gran mayoría el flujo se concentra en grandes cantidades logrando así un acoplamiento casi perfecto entre ambos sistemas. Esto es gracias a la gran permeabilidad que presenta el material [9], dentro del electromagnetismo la ley de Bio-Savart establece que la permeabilidad en el vacío es esencialmente una relación entre la magnitud de la densidad de campo magnético (Teslas) a la corriente que la produce (Amperios) [10], [11]. En el espacio libre el campo magnético B o densidad de campo magnético varía linealmente con la corriente que la produce,

por lo tanto su relación la cual es llamada la permeabilidad en el vacío μ_0 es constante. Entonces se puede concluir que para materiales que exhiben una variación lineal de B con respecto a I se debe tomar como permeabilidad, la permeabilidad del vacío μ_0 [12].

De acuerdo con lo anterior los materiales pueden ser clasificados desde el punto de vista de la variación $B - I$ en dos clases:

- a) Materiales no magnéticos tal como los dieléctricos y metales con permeabilidad igual a μ_0 .
- b) Materiales magnéticos que pertenecen al grupo de hierro o materiales ferromagnéticos. Dentro de esta clase, una corriente dada produce una muy grande cantidad de campo magnético B que en el espacio libre. La permeabilidad de los materiales ferromagnéticos es mucho más alta que de los materiales del espacio libre, pero a diferencia de ellos, estos son no lineales, ya que varía sobre un amplio rango con un pequeño cambio en la corriente.

Los materiales ferromagnéticos además se clasifican de la siguiente manera:

- a) Materiales ferromagnéticos suaves para la cual una linealización de la variación $B - I$ en una región es posible.
- b) Materiales ferromagnéticos duros para el cual es difícil dar un significado al término permeabilidad. Dentro de estos grupos se encuentran los imanes permanentes [3], [4], [13].

8.1.4.3 Intensidad de campo magnético

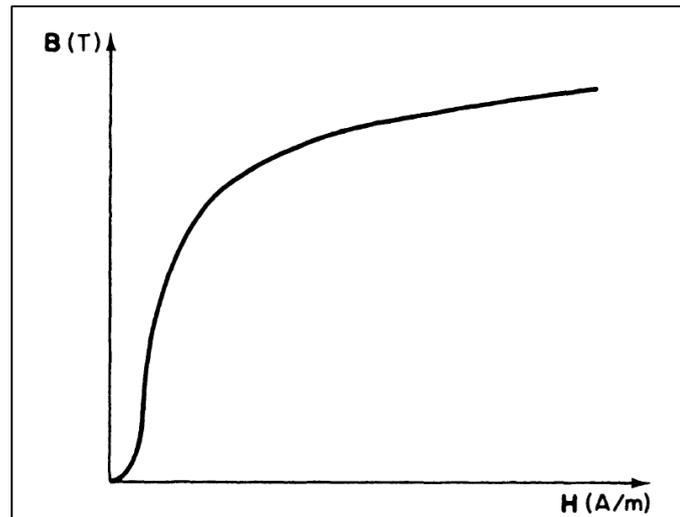
La intensidad de campo magnético o fuerza H (Amperios vuelta por longitud) es un vector el cual está definido por la relación:

$$B = \mu H \quad (8.5)$$

La intensidad de campo magnético H no es más que el esfuerzo de la corriente por establecer un campo [6]. Para medios isotrópicos μ (permeabilidad del material) es un escalar y así tanto el campo B como H están en la misma dirección. Un medio isotrópico es aquel material que tiene las mismas propiedades en todas las direcciones [14].

Las características $B - H$ de los materiales suaves, es llamado la curva de magnetización del material, y es tal y como se muestra en la siguiente figura 8.5.

Figura 8.5 Curva de magnetización de un material ferromagnético.



Fuente: [12].

Se aprecia en la figura que en un cierto tramo la permeabilidad es casi constante hasta que llega a un punto denominado rodilla en donde ocurre el máximo valor de μ al que la permeabilidad puede llegar. La permeabilidad de los materiales ferromagnéticos suaves es mucho más grande que la permeabilidad en el vacío, por lo que es conveniente definir la permeabilidad relativa μ_r .

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (8.6)$$

Por lo general el valor de la permeabilidad relativa está en el orden de miles en los núcleos ferromagnéticos de los transformadores (típicamente 2000 a 80000).

8.1.4.4 Bucle de histéresis

Las características de la curva $B - T$ pueden ser no lineales o tener multivalores, esto es referido como la curva de histéresis. Para ilustrar este fenómeno se analizara una secuencia detallada la figura 8.6 el cual muestra la evolución de un bucle de histéresis con núcleo ferromagnético al cual se le ha aplicado una fmm (fuerza magnetomotriz en Amperios vuelta) en diferentes periodos T .

Intervalo 1 Entre el tiempo $t = 0$ y $t = T/4$, la intensidad de campo magnético H es positiva y se incrementa. Entonces la densidad de flujo se incrementa a lo largo de la curva inicial (oa) arriba al valor de saturación B_s . Incrementando H más allá del nivel de saturación no resulta en un incremento de B .

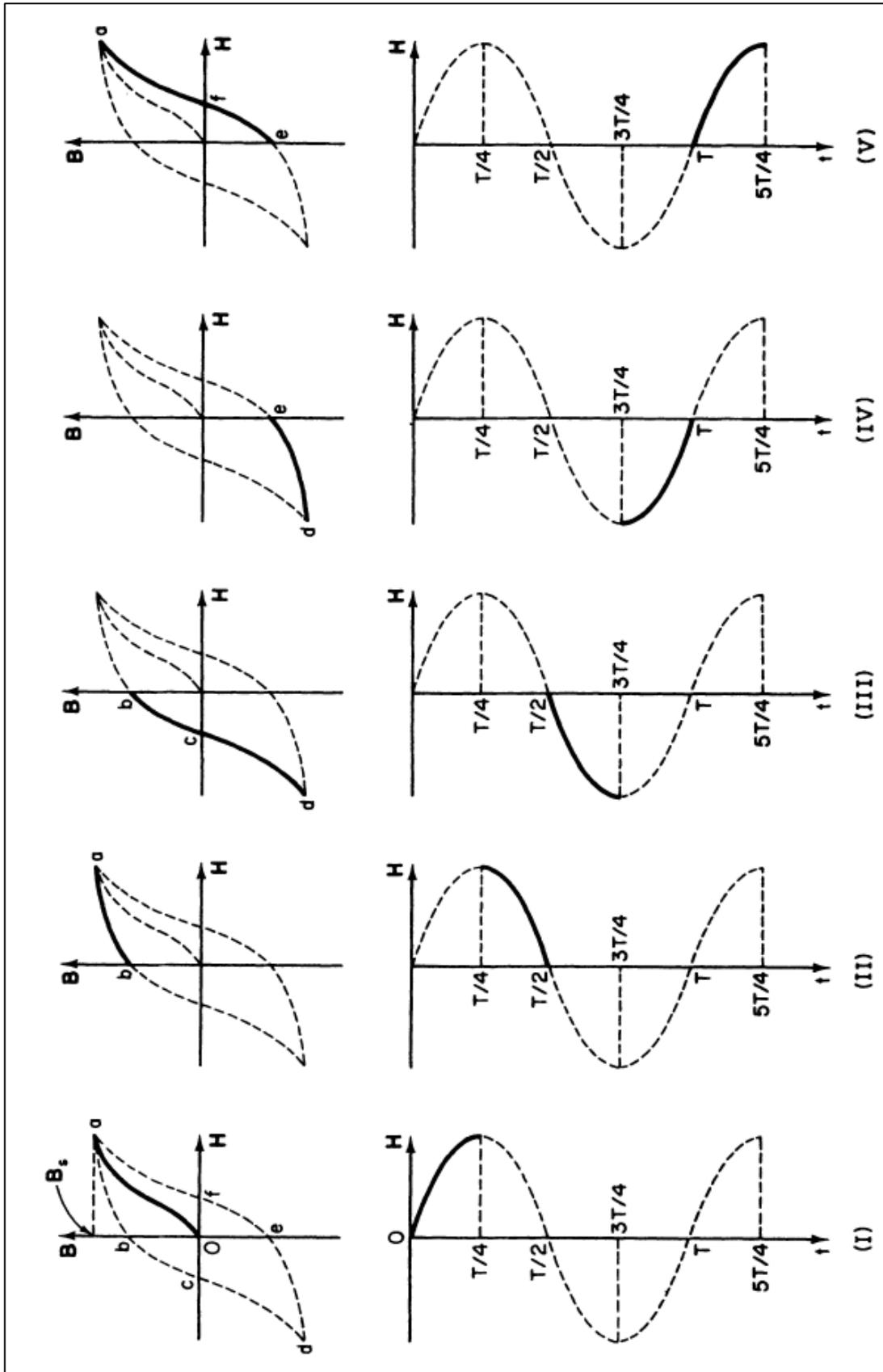
Intervalo 2 Entre el tiempo $t = T/4$ y $t = T/2$, la intensidad de campo magnético es positiva pero está decreciendo. La densidad de flujo B es entonces vista como decreciente a lo largo del segmento ab . Se debe notar que ab está más alto que (oa) , y así para el mismo valor de H se obtiene diferentes valores de B . Se aprecia también que en dicho tiempo $T/2$ existe un pequeño valor de campo magnético B_r al cual se le denomina flujo residual. Esto quiere decir que si se suspende la fuente de fmm el núcleo aun estará magnetizado.

Intervalo 3 Entre el tiempo $t = T/2$ y $t = 3T/4$, la intensidad de campo H magnético se invierte e incrementa en magnitud. B decrece hasta el punto cero c . El valor de H en tal magnetización es cero y es llamado la fuerza coerciva H_c . Si H decrece aún más, resulta en una inversión de B arriba del punto d , el cual corresponde a $t = 3T/4$.

Intervalo 4 Entre el tiempo $t = 3T/4$ y $t = T$, el valor de H es negativo pero sigue incrementándose. La densidad de flujo B es negativa y se incrementa desde d a e . El campo residual es observado en e con $H = 0$.

Intervalo 5 Entre el tiempo $t = T$ y $t = 5T/4$, H es incrementado desde 0, y la densidad de flujo es negativa pero sigue incrementándose hacia arriba hasta f , donde el material es desmagnetizado más allá de f , y se puede observar que B se incrementa hacía a de nuevo.

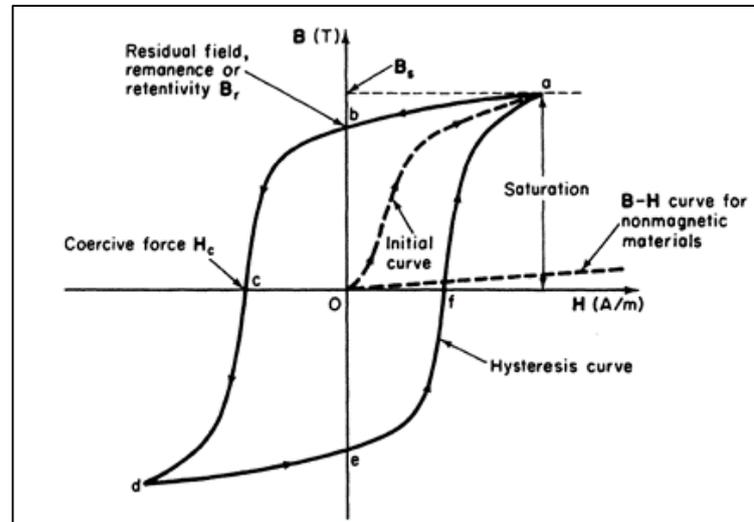
Figura 8.6 Proceso en la formación de la curva de histéresis en materiales ferromagnéticos.



Fuente: [12].

En la figura 8.7 se puede apreciar un bucle típico de histéresis. Dentro de la gráfica las características de la curva $B - H$ para materiales no magnéticos se muestran para indicar las magnitudes relativas involucradas [12].

Figura 8.7 Curva de histéresis de una chapa de metal típica.



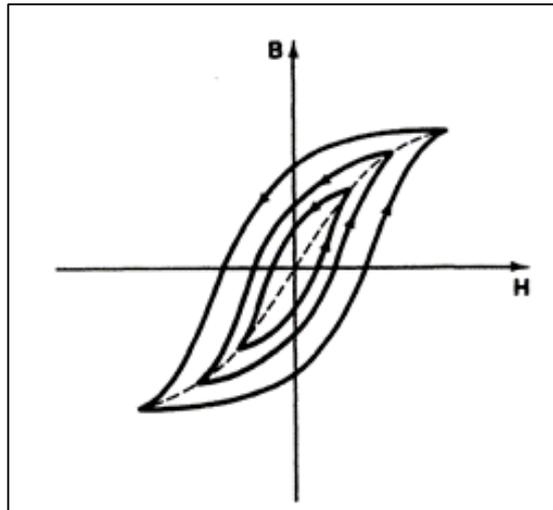
Fuente: [12].

Se debe notar que para cada valor máximo del ciclo de intensidad de campo magnético AC, existe un bucle de estado estable, tal y como se muestra en la figura 8.8. se puede demostrar que el ancho de cada ciclo representa las pérdidas en el hierro del núcleo ferromagnético, así para suprimir las pérdidas en el mismo, se debe buscar métodos los cuales reduzcan el tamaño del bucle, aunque en algunos casos es bastante deseable que dichas pérdidas existan para propósitos afines [15].

Como se mencionó anteriormente el área del bucle depende en la máxima densidad de flujo, y como resultado, se puede decir que la potencia disipada a través de la histéresis a la cual se le denomina P_h (watt) está dada por:

$$P_h = k_n f (B_m)^n \quad (8.7)$$

Donde k_n es una constante, f es la frecuencia (Hz), y B_m (Tesla) es la densidad de flujo máxima. El exponente n se determina desde resultados experimentales y tiene rangos entre 1.5 y 2.5.

Figura 8.8 Bucle de histéresis.

Fuente: [12].

8.1.4.5 Pérdidas en el cobre y corrientes parasitas

Al momento de inducir un voltaje sinusoidal dentro de un material ferromagnético se genera un flujo magnético que varía en el tiempo, esto es conocido como o la ley de Faraday, al mismo tiempo el flujo variante en el tiempo genera un voltaje en las chapas magnéticas que forman el núcleo [6], el núcleo al estar formado por metal posee una pequeña resistencia la cual crea una pequeña corriente circundante en forma de remolino al cual se le denomina corriente de Eddy o corrientes parasitas, debido a que estas corrientes generan grandes pérdidas, el núcleo magnético debe ser construido con chapas magnéticas unidas entre sí para minimizar dichas pérdidas [15].

El análisis completo de estas pérdidas es muy complicado. Sin embargo para tener en cuenta estas pérdidas en algún modelamiento un pequeño factor (adimensional) es empleado para casos prácticos.

$$factor = \frac{Area_de_la_chapa_magnética}{Area_de_la_sección_transversd_bruta} \quad (8.8)$$

Típicamente los rangos de grosor de las laminaciones van de 0.01mm a 0.35m, con factores de apilamiento entre 0.5 y 0.95. Las pérdidas de potencia por corrientes parasitas por unidad de volumen son expresadas por la fórmula empírica siguiente:

$$P_e = K_e (f B_m t_1)^2 W / m^3 \quad (8.9)$$

Esta fórmula muestra que las pérdidas de potencia por corrientes parasitas por unidad de volumen varían con el cuadrado de la frecuencia f , la densidad de flujo B_m , y el espesor de la

laminación t_l . Cabe recalcar que K_e es la constante de proporcionalidad. Dentro de las pérdidas del núcleo se encuentran incluidas las pérdidas por corrientes parasitas.

8.1.5 Principios de funcionamiento

Generalmente para la resolución de problemas que implican transformadores se utiliza herramientas que implican la analogía con la resolución de circuitos eléctricos, este método aunque no es muy preciso, ayuda a obtener datos aproximados con los cuales se pueden trabajar. Para entender un poco el comportamiento del flujo magnético dentro del núcleo del transformador se analizarán dos casos principales.

a) Bobina con núcleo de hierro alimentado con corriente continua

En la figura 8.9 se muestra un núcleo con una bobina. Los terminales de la bobina para este caso se encuentran conectadas a una fuente de corriente continua, se sabe por la ley de ohm que $I = V / R$, en donde R (ohm) es la resistencia propia de la bobina, debido a la circulación de la corriente por una bobina se crea un flujo magnético [16], este flujo se concentra en el núcleo magnético y se crea una fmm (fuerza magneto motriz) $\mathfrak{F} = NI$ que crea un flujo magnético Φ (webbers) en el núcleo. Si se sabe que la corriente I en el circuito eléctrico es constante, entonces por la ley de Hopkinson se tiene que:

$$\mathfrak{F} = \Phi \mathfrak{R} \quad (8.10)$$

Remplazando nos queda:

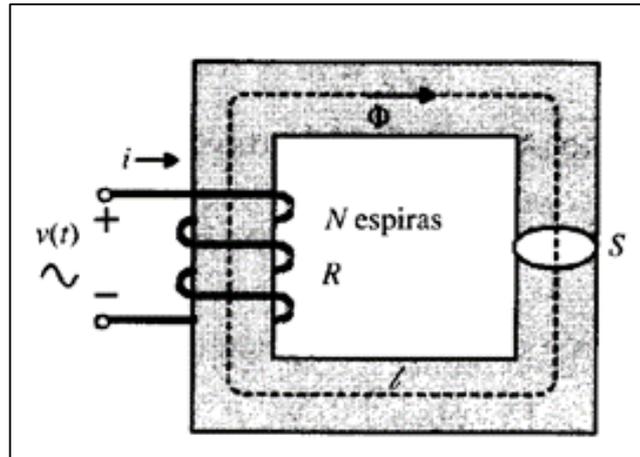
$$NI / \mathfrak{R} = \Phi \quad (8.11)$$

Como se mencionó anteriormente la corriente I es constante y N es el número de vueltas, que también es constante, por lo tanto se tendrá una fmm constante. Si se varía la reluctancia del circuito magnético \mathfrak{R} , para mantener la igualdad de la ecuación 8.10 y sabiendo que la fuerza magnetomotriz es constante, lo único que puede variar es el flujo Φ .

Entonces para un circuito excitado con corriente directa se puede concluir lo siguiente:

- El flujo depende del valor de la reluctancia o características del núcleo.
- La corriente es independiente de las características del núcleo.
- Con una excitación de corriente directa constante se tiene una fuerza magnetomotriz constante.

Figura 8.9 Núcleo magnético con una bobina enrollada.



Fuente: [4].

b) Bobina con núcleo de hierro alimentado con corriente alterna

Como en el caso anterior si ahora a la fuente de la figura 8.9 se la reemplaza por una de corriente alterna, esta corriente generara un flujo variante en el tiempo, esto y la ley de Faraday mencionan que se creara un voltaje inducido en las bobinas enrolladas en el núcleo.

Si la fuente de voltaje está dada por:

$$v(t) = V_{\max} \cos(\omega t) \quad (8.12)$$

Y aplicando la ley de voltajes de Kirchoff a la malla formada en la figura 8.9 se tiene:

$$v(t) = i(t)R + N \frac{d\Phi}{dt} \quad (8.13)$$

Ignorando las perdidas en el cobre para efectos prácticos se obtiene:

$$v(t) = N \frac{d\Phi}{dt} \quad (8.14)$$

Resolviendo la ecuación 8.14 para el flujo:

$$\Phi = \frac{1}{N} \int v(t) dt \quad (8.15a)$$

$$\Phi = \frac{1}{N} \int V \cos(\omega t) dt \quad (8.15b)$$

En donde como resultado resulta:

$$\Phi = \frac{V}{N\omega} \sin(\omega t) \quad (8.16)$$

En la resolución de la integral, al no existir un flujo remanente en el núcleo la constante de integración es igual a cero. La ecuación anterior muestra que el flujo en el núcleo es

directamente proporcional al voltaje y que además se encuentra atrasada 90° con respecto al voltaje de la fuente. Si la fuente de voltaje se mantiene constante, entonces se tiene un flujo constante. Si se varía la reluctancia del núcleo y al tener un flujo constante, para que se cumpla la ecuación 8.10 lo que debe variar es la fuerza magnetomotriz, pero dentro de esta, el número de vueltas es constante, entonces lo único que debe variar es la intensidad del circuito eléctrico. Entonces con todo lo mencionado se puede concluir lo siguiente:

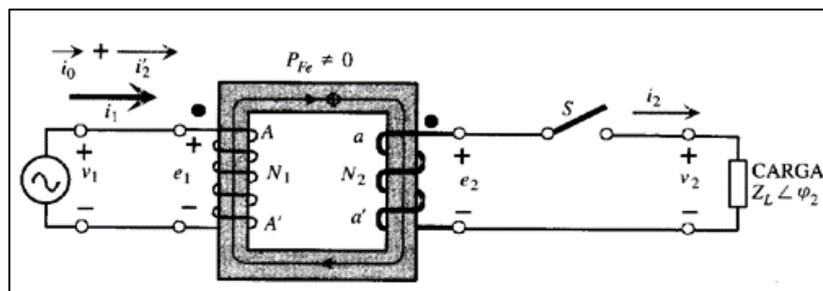
- El flujo no depende del valor de la reluctancia o características del núcleo.
- La corriente es totalmente dependiente de las características del núcleo.
- Con una excitación de corriente alterna, si la fuente de voltaje se mantiene constante entonces el flujo dentro del núcleo también será constante.

Haciendo hincapié en el hecho que la corriente es totalmente dependiente de las características del núcleo, se puede demostrar que si en el núcleo existe un entrehierro, esto hará que la reluctancia de la misma se incremente, un incremento en la reluctancia significa una reducción del flujo, pero si la fuente de voltaje no ha cambiado, entonces el valor del flujo tampoco debe variar, por lo que el circuito para mantener esta igualdad debe consumir más corriente de la red, lo que ocasiona un incremento de la fuerza magnetomotriz, igualando así la ecuación ya antes mencionada.

8.1.6 Funcionamiento de un transformador ideal

Para comprender el comportamiento de un transformador real, es necesario conocer el funcionamiento del transformador sin experimentar pérdidas, esto hace referencia a un transformador ideal. En la figura 8.10 se puede apreciar una esquematización de un transformador monofásico con una fuente de voltaje alterna.

Figura 8.10 Esquematización de un transformador monofásico.



Fuente: [4].

Analizando la figura 8.10, se aprecia que la dirección del flujo creado sigue la ley de la mano derecha (Ley de Lorentz), este flujo como se analizó es constante mientras la fuente de voltaje sea constante. Debido a que el flujo es variante en el tiempo y por la ley de Faraday se inducirá un voltaje en el secundario del transformador, como el transformador es ideal, todo el flujo creado por la fuente se concentra en el núcleo, por lo que no existe flujo de dispersión, por lo que si sabemos que el flujo es constante y está desfasado noventa grados con respecto a la fuente de voltaje, es lógico suponer que el voltaje generado en el secundario e_2 tendrá la misma dirección y polaridad que el voltaje e_1 de la fuente [1]. Esto también se conoce en teoría de circuitos como el convenio de signos, el cual se puede identificar por la señalética del punto ubicado en el extremo superior de cada bobina [4].

Por lo tanto con lo anteriormente mencionado se puede concluir que:

- Cuando el secundario no se encuentra conectado a una carga, se crea un voltaje en el mismo, pero no existe corriente alguna.

El voltaje generado en cada una de las bobinas está dada entonces por:

$$e_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}; e_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (8.17)$$

Como se mencionó, este transformador es ideal por lo que las pérdidas en el cobre de las bobinas se desprecian, por lo que el voltaje de la fuente es igual a la fuente inducida, tal y como se muestra en la ecuación 8.18.

$$v_1 = e_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad (8.18)$$

Si despejamos las formulas de la ecuación 8.17, debido al flujo común existente entre ellas tenemos la denominada relación de transformación del transformador, la cual se expresa de la siguiente manera.

$$\frac{v_1}{N_1} = \frac{v_2}{N_2} = a \quad (8.19)$$

Se aprecia en la ecuación 8.19 que esta relación solamente se cumple en los transformadores ideales, es decir en los transformadores que no presentan pérdidas.

- El flujo se mantiene constante en todo momento y se necesita una pequeña corriente I_0 (Amperios) llamada corriente de magnetización.

En este caso la corriente que se necesita para magnetizar el núcleo es una pequeña corriente de magnetización I_0 , esta corriente es análoga a la corriente de excitación I_{ex} (Amperios) del transformador. Entonces la fuerza magnetomotriz necesaria para magnetizar el núcleo es:

$$\mathfrak{F} = N_1 I_0 \quad (8.20)$$

Cabe mencionar que esta corriente solo se produce en el primario, ya que el secundario se encuentra en circuito abierto,

Si se cierra el interruptor de la bobina donde se encuentra conectada la carga, es decir cuando al transformador funciona con carga, entonces una corriente en el secundario, denominada corriente I_2 (Amperios) comienza a fluir.

Esta circulación de corriente genera una fuerza magnetomotriz la cual crea un flujo magnético. El sentido de este flujo magnético depende de la disposición de los devanados. Según sea la disposición de los devanados la dirección del flujo puede variar, a esta disposición se le denomina como conexión aditiva y sustractiva de los transformadores. La polaridad sustractiva es estándar para todos los transformadores monofásicos de más de 200 kVA, siempre que la capacidad del devanado de alto voltaje sea de más de 8660 V. Todos los demás transformadores tienen polaridad aditiva [1].

Generalmente se elige el transformador con polaridad sustractiva para el estudio de los transformadores, y para conocer ciertos detalles. En este caso estudiaremos el comportamiento de la máquina en los dos casos.

8.1.6.1 Polaridad sustractiva

Cuando el transformador se encuentra conectado en polaridad sustractiva, el flujo creado por I_2 , se opone al flujo creado por el devanado primario, pero como se mencionó el flujo total del circuito debe permanecer constante ya que el voltaje en el primario permanece constante.

Es válido realizar la siguiente analogía. Si se tiene un flujo generado por I_2 que minimiza los efectos del flujo creado por la corriente del devanado primario, entonces se puede tomar dicha reducción como una variación en la reluctancia del circuito magnético, por lo que con los datos que conocemos, para que la ecuación 8.10 permanezca constante, es la corriente en el primario la que debe aumentar para contrarrestar los efectos del flujo que se genera en el devanado secundario.

Esto significa que la corriente I_1 tiene dos componentes:

- La corriente I_0 la cual magnetiza al núcleo.
- Una corriente I' que contrarresta los efectos magnetizantes del flujo secundario.

Para saber el valor de esa corriente I' se realizara lo siguiente:

Sabemos que en vacío la fmm total esta dada por la ecuación 8.20, al momento de conectar una carga, otro flujo aparece, pero como la fuente de voltaje en el primario no ha sido alterada, entonces el flujo del mismo tampoco lo está. Por lo que, tanto el flujo en vacío como en carga permanecen constantes. La fmm total cuando el transformador trabaja con carga está dada por la siguiente ecuación:

$$\mathfrak{F}_c = N_1 I_1 - N_2 I_2 \quad (8.21)$$

Ya que como se dijo las fuerzas magnetomotrices se contrarrestan al estar las bobinas conectadas en polaridad sustractiva. Entonces si las fuerzas magnetomotrices tanto en vacío como en carga son iguales, al igualar las ecuaciones 8.20 y 8.21 nos queda:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_c &= \mathfrak{F} \\ N_1 I_1 - N_2 I_2 &= N_1 I_0 \end{aligned}$$

Despejando I_1 nos queda:

$$I_1 = I_0 + \frac{N_2}{N_1} I_2 \quad (8.22)$$

Por lo tanto el valor de la corriente I' que ayuda a contrarrestar los efectos del flujo generado por I_2 es igual a:

$$I' = \frac{N_2}{N_1} I_2 \quad (8.23)$$

La ecuación 8.23 puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$I' = I'_2 = \frac{N_2}{N_1} I_2$$

Esto es igual a:

$$I'_2 = \frac{N_2}{N_1} I_2 \quad (8.24)$$

Esta corriente es conocida como corriente secundaria reducida [4], o como corriente secundaria referida al primario y es la encargada de contrarrestar el efecto desmagnetizante producida por

el devanado secundario debido a la conexión sustractiva del transformador. A plena carga I_2 es de ordinario veinte veces por lo menos mayor que I_0 , por lo que a menudo se lo desprecia de la ecuación 8.22, por lo que nos queda la siguiente expresión aproximada:

$$I_1 \approx \frac{N_2}{N_1} I_2 \quad (8.25)$$

Reagrupando términos:

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{1}{a} \quad (8.26)$$

En donde como se vio en la ecuación 8.19, a es la relación de transformación del transformador. Se puede decir entonces que las corrientes son inversamente proporcionales al aumento de voltaje en el transformador, lo que quiere decir que existe una potencia constante, tanto en el primario como en el secundario.

8.1.6.2 Polaridad aditiva

En la polaridad aditiva, el flujo creado por la corriente I_2 sigue la misma dirección que el flujo creado por I_1 . Por lo que las fuerzas magnetomotrices se suman y por lo tanto la ecuación 8.21 es igual a:

$$\mathfrak{F}_c = N_1 I_1 + N_2 I_2 \quad (8.27)$$

La f_{mm} en vacío sigue siendo la misma que para el caso de la conexión sustractiva, por lo que no genera cambio alguno. Igualando la ecuación 8.20 y 8.27 obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_c &= \mathfrak{F} \\ N_1 I_1 + N_2 I_2 &= N_1 I_0 \end{aligned}$$

Despejando la corriente I_1 obtenemos:

$$I_1 = I_0 - \frac{N_2}{N_1} I_2 \quad (8.28)$$

En este caso se observa que la corriente total I_1 necesita de una corriente negativa para mantener el flujo constante, ya que existe un incremento en el flujo del núcleo.

¿Cómo se puede interpretar esta corriente? Para responder a esta cuestión es preciso señalar que si tomamos como el incremento del flujo como una variación de la reluctancia magnética del núcleo, se puede decir que dicho material incrementa su permeabilidad, pero cómo se vio

anteriormente el flujo no depende del material magnético, entonces al existir una disminución en la reluctancia, por la ecuación 8.10, es la fmm la que debe variar, por lo tanto la corriente en la bobina primaria varía para mantener la igualdad del flujo magnético, en este caso reduciéndose lo que explicaría el valor negativo en la ecuación 8.28.

En términos más sencillos cuando se conecta un transformador en polaridad aditiva no se necesita demasiada corriente para crear el flujo magnético para magnetizar al núcleo. Esto es que I_0 debe reducirse en cierto porcentaje para mantener la igualdad. Lo que significaría que $I_2 \leq I_0$ por lo tanto la ecuación 8.28 se puede aproximar de la siguiente manera:

$$I_1 \approx I_0 \quad (8.29)$$

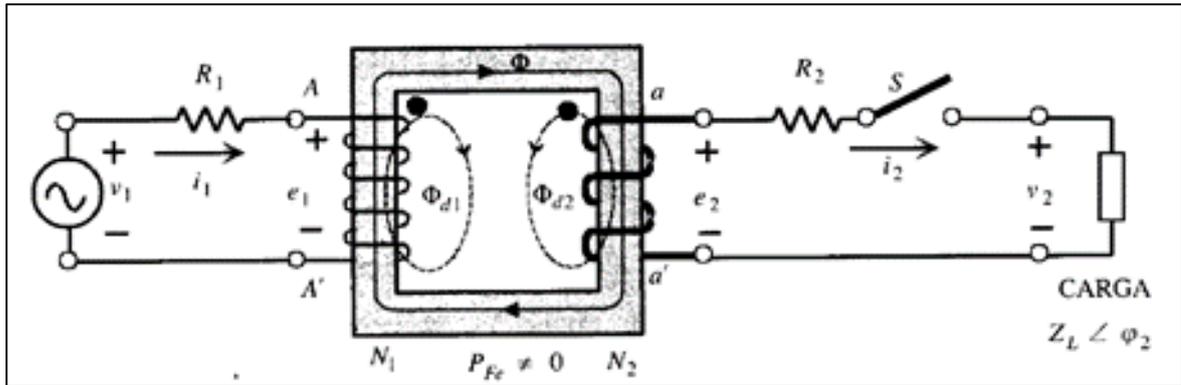
8.1.7 Funcionamiento de un transformador real

Ahora se analizará el comportamiento del transformador con pérdidas, es decir, el transformador real. En este caso se deben tomar ciertas consideraciones:

- El flujo no se concentra en su totalidad en el núcleo, existe una pequeña parte que circula por el espacio libre denominado flujo disperso, o flujo de dispersión.
- Existe una pequeña caída de tensión debido a la resistencia interna de los devanados, provocando que la ecuación 8.19 no se cumpla.
- La inductancia propia del devanado también afecta el flujo magnético creado por la misma.
- Existen pérdidas en el núcleo magnético denominado pérdidas por histéresis y por corrientes de Eddy.

Se necesitan desarrollar ecuaciones matemáticas para comprender el hecho de que el flujo no se concentra en su totalidad dentro del núcleo. El flujo por lo tanto se divide en dos partes el flujo mutuo Φ_m (Webers), y el flujo de dispersión Φ_l (Webers).

Figura 8.11 Diagrama de un transformador real.



Fuente: [4].

El flujo mutuo Φ_m es igual tanto para el devanado primario como para el secundario. Analizando el circuito eléctrico impuesto por la figura 8.11 obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$v_1 = i_1(r_1 + x_1) + \frac{N_1 d\Phi_1}{dt} \quad (8.30a)$$

$$v_2 = i_2(r_2 + x_2) + \frac{N_2 d\Phi_2}{dt} \quad (8.30b)$$

Donde:

i_1 Intensidad en el devanado primario (Amperios).

r_1 Resistencia de la bobina primaria (Ohm).

x_1 Reactancia inductiva del devanado primario (Ohm).

i_2 Intensidad en el devanado secundario (Amperios).

r_2 Resistencia de la bobina secundaria (Ohm).

x_2 Reactancia inductiva del devanado secundario (Ohm).

Tanto el flujo 1 como el flujo 2 se dividen la siguiente manera:

$$\Phi_1 = \Phi_m + \Phi_{l1} \quad (8.31a)$$

$$\Phi_2 = \Phi_m + \Phi_{l2} \quad (8.31b)$$

Se debe tener en cuenta que el flujo mutuo total dentro del núcleo depende de la conexión de los devanados, que como ya se analizó anteriormente las conexiones pueden ser: la conexión aditiva y sustractiva, de donde se deduce la ecuación 8.32.

$$\Phi_m = \Phi_{m1} \pm \Phi_{m2} \quad (8.32)$$

8.1.7.1 Polaridad sustractiva

Se analizara la conexión sustractiva de un transformador real, partiendo de lo aprendido en el apartado anterior, donde se analizó un transformador ideal. Reemplazando la ecuación 8.31 dentro de la ecuación 8.30 obtenemos:

$$v_1 = i_1(r_1 + x_1) + \frac{N_1 d(\Phi_m + \Phi_{l1})}{dt}$$

$$v_2 = i_2(r_1 + x_2) + \frac{N_2 d(\Phi_m + \Phi_{l2})}{dt}$$

Desarrollando las ecuaciones:

$$v_1 = i_1(r_1 + x_1) + \frac{N_1 d\Phi_{l1}}{dt} + \frac{N_1 d\Phi_m}{dt} \quad (8.33a)$$

$$v_2 = i_2(r_1 + x_2) + \frac{N_2 d\Phi_{l2}}{dt} + \frac{N_2 d\Phi_m}{dt} \quad (8.33b)$$

Comparando la ecuación 8.33 con la ecuación 8.18, se observa que existen 3 componentes extra, que representan justamente las pérdidas de potencia que genera el transformador, estas son:

- Las pérdidas en el cobre (perdidas por efecto joule) (watt).
- El flujo de dispersión (weber).
- La inductancia propia de la bobina (Henrio).

Dentro de la ecuación 8.33 se observa que:

$$e_1 = \frac{N_1 d\Phi_{l1}}{dt} + \frac{N_1 d\Phi_m}{dt} \quad (8.34a)$$

$$e_2 = \frac{N_2 d\Phi_{l2}}{dt} + \frac{N_2 d\Phi_m}{dt} \quad (8.34b)$$

Despejando el flujo mutuo obtenemos:

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{e_1}{N_1} - \frac{d\Phi_{l1}}{dt} = \frac{e_2}{N_2} - \frac{d\Phi_{l2}}{dt}$$

Que es igual a:

$$\frac{e_1}{N_1} - \frac{d\Phi_{l1}}{dt} = \frac{e_2}{N_2} - \frac{d\Phi_{l2}}{dt} \quad (8.35)$$

Si reordenamos los términos de la ecuación 8.35 dejando solamente la simbología de voltajes obtenemos lo siguiente:

$$\frac{(e_1 - e_{11})}{(e_2 - e_{12})} = \frac{N_1}{N_2} = a \quad (8.36)$$

Donde:

e_{11} Voltaje generado debido al flujo disperso en el primario (Voltios).

e_{12} Voltaje generado debido al flujo disperso en el secundario (Voltios).

Se observa que la ecuación 8.36 tiene cierta similitud con la relación de transformación de la ecuación 8.19, sin embargo debido al flujo de dispersión la relación de transformación no es perfecta. Pero se puede realizar aproximaciones eliminando el voltaje generado por el flujo disperso. Puesto que en transformadores bien diseñados el flujo mutuo es mayor que el flujo de dispersión, por lo tanto el voltaje total en el primario de un transformador con el voltaje en el secundario de un transformador es aproximadamente:

$$\frac{e_1}{e_2} \approx \frac{N_1}{N_2} = a \quad (8.37)$$

Funcionamiento en vacío

Cuando el transformador trabaja en vacío la corriente en el secundario es igual a cero $I_2 = 0$ por lo que la ecuación 8.33 sufre un ligero cambio.

$$v_1 = i_1(r_1 + x_1) + \frac{N_1 d\Phi_{11}}{dt} + \frac{N_1 d\Phi_m}{dt} \quad (8.38a)$$

$$v_2 = e_2 \quad (8.38b)$$

El flujo mutuo $\Phi_m = \Phi_{m1}$ es ahora solo creado por la corriente de la bobina 1. Para la creación de la fmm en vacío, hace falta una corriente semejante a la corriente de magnetización I_0 ya que esta debe vencer las pérdidas por corrientes parasitas, entonces la corriente necesaria es la suma de dos componentes, una para vencer las pérdidas por corrientes de Eddy y otra para magnetizar al núcleo. Esta corriente es:

$$I_1 = I_0 + I_{loss} \quad (8.39)$$

Para la creación de la fmm en el núcleo, la ecuación es igual a:

$$\mathfrak{F} = N_1 I_1 \quad (8.40)$$

Funcionamiento con carga

Cuando el transformador funciona con carga la corriente I_2 produce su propio flujo el cual está dado por la ecuación 8.31b. Este flujo se opone al creado por la corriente del devanado primario ya que el transformador se encuentra en conexión sustractiva, por lo tanto la ecuación 8.33 es igual a:

$$v_1 = i_1(r_1 + x_1) + \frac{N_1 d\Phi_{l1}}{dt} + \frac{N_1 d(\Phi_{m1} - \Phi_{m2})}{dt} \quad (8.41a)$$

$$v_2 = i_2(r_1 + x_2) + \frac{N_2 d\Phi_{l2}}{dt} + \frac{N_2 d(\Phi_{m1} - \Phi_{m2})}{dt} \quad (8.41b)$$

Sabemos por definición de la ley de Faraday, que el voltaje e_1 y e_2 vienen dado por:

$$e_1 = \frac{N_1 d\Phi_{l1}}{dt} + \frac{N_1 d(\Phi_{m1} - \Phi_{m2})}{dt} \quad (8.42a)$$

$$e_2 = \frac{N_2 d\Phi_{l2}}{dt} + \frac{N_2 d(\Phi_{m1} - \Phi_{m2})}{dt} \quad (8.42b)$$

Reemplazando la ecuación 8.42 por la ley de Hopkinson.

$$e_1 = \frac{N_1}{\mathfrak{R}_{l1}} \frac{d\mathfrak{S}_{l1}}{dt} + \frac{N_1}{\mathfrak{R}_m} \frac{d(\mathfrak{S}_{m1} - \mathfrak{S}_{m2})}{dt} \quad (8.43a)$$

$$e_2 = \frac{N_2}{\mathfrak{R}_{l2}} \frac{d\mathfrak{S}_{l2}}{dt} + \frac{N_2}{\mathfrak{R}_m} \frac{d(\mathfrak{S}_{m1} - \mathfrak{S}_{m2})}{dt} \quad (8.43b)$$

Lo que se trata de demostrar es que el flujo disperso no afecta lo visto anteriormente en lo referente a la fmm creada en el núcleo, ya que como se ve en la ecuación 8.43 la fmm que crea el flujo en el núcleo es la misma que en un transformador ideal, y por lo tanto se tendrá un incremento en la corriente del primario, tal y como se vio anteriormente.

8.1.8 Circuito equivalente de un transformador

Para ejemplificar como se obtiene un circuito eléctrico a partir de modelos matemáticos se lo realizara de la siguiente manera. Partiendo de la ecuación 8.33, al aplicar la ley de Hopkinson a la misma obtenemos la ecuación 8.44.

$$v_1 = i_1(r_1 + x_1) + \frac{N_1}{\mathfrak{R}_{l1}} \frac{d\mathfrak{S}_{l1}}{dt} + \frac{N_1}{\mathfrak{R}_m} \frac{d\mathfrak{S}_m}{dt} \quad (8.44a)$$

$$v_2 = i_2(r_1 + x_2) + \frac{N_2}{\mathfrak{R}_{l2}} \frac{d\mathfrak{S}_{l2}}{dt} + \frac{N_2}{\mathfrak{R}_m} \frac{d\mathfrak{S}_m}{dt} \quad (8.44b)$$

En donde:

\mathfrak{R}_{l1} Es la reluctancia del flujo de dispersión del primario (Amperios vuelta/Wb).

\mathfrak{F}_{l1} Es la fuerza magnetomotriz el cual genera el flujo de dispersión del primario (Amperios vuelta).

\mathfrak{F}_m Es el fuerza magnetomotriz el cual genera el flujo mutuo (Amperios vuelta).

\mathfrak{R}_m Es el reluctancia mutua por donde circula el flujo mutuo (Amperios vuelta/Wb).

\mathfrak{R}_{l2} Es la reluctancia del flujo de dispersión del secundario (Amperios vuelta/Wb).

\mathfrak{F}_{l2} Es la fuerza magnetomotriz el cual genera el flujo de dispersión del secundario (Amperios vuelta).

Partiendo de la ecuación 8.20 podemos descomponer la ecuación 8.44 de la siguiente manera:

$$v_1 = i_1(r_1 + x_1) + \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{l1}} \frac{di_1}{dt} + \frac{N_1 N_m}{\mathfrak{R}_m} \frac{di_m}{dt} \quad (8.45a)$$

$$v_2 = i_2(r_2 + x_2) + \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{l2}} \frac{di_2}{dt} + \frac{N_2 N_m}{\mathfrak{R}_m} \frac{di_m}{dt} \quad (8.45b)$$

No resulta menester imaginar que el termino i_m es común entre un circuito y otro, ya que el mismo depende de la conexión del transformador. De igual manera el término N_m hace referencia al número de vueltas tanto del devanado primario y secundario. Es bien conocido en teoría de circuitos el voltaje en una inductancia o bobina ya que los dos términos de la ecuación 8.45 contienen la derivada de una corriente, de lo cual se deduce lo siguiente:

$$v_1 = i_1(r_1 + x_1) + L_{l1} \frac{di_1}{dt} + L_m \frac{di_m}{dt} \quad (8.46a)$$

$$v_2 = i_2(r_2 + x_2) + L_{l2} \frac{di_2}{dt} + L_m \frac{di_m}{dt} \quad (8.46b)$$

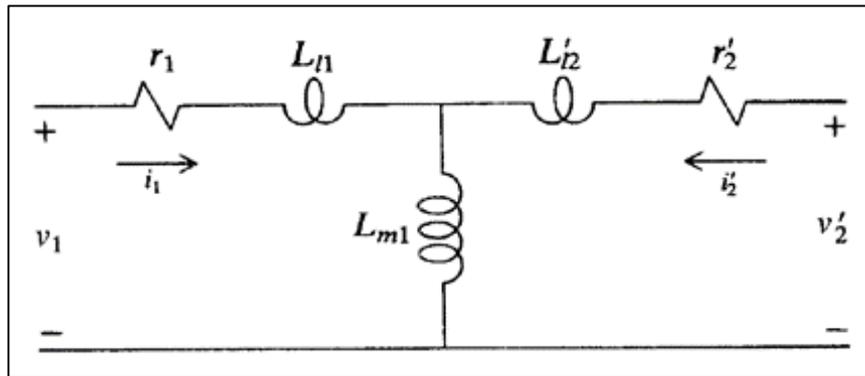
El término L_{l1} y L_{l2} son las inductancias (Henrios) de perdida tanto del devanado primario y secundario respectivamente que se genera por el flujo disperso. Mientras que el termino L_m (Henrio) representa una inductancia mutua entre ambos circuitos acoplados magnéticamente. Reordenando la ecuación 8.46 de la siguiente manera:

$$v_1 = i_1(r_1 + x_1) + e_{11} + e_m \quad (8.47a)$$

$$v_2 = i_2(r_1 + x_2) + e_{12} + e_m \quad (8.47b)$$

Analizando el circuito de la figura 8.12 vemos que tanto la ecuación 8.47a como 8.47b se cumplen, ya que tenemos el acoplamiento mutuo el cual une a los dos circuitos.

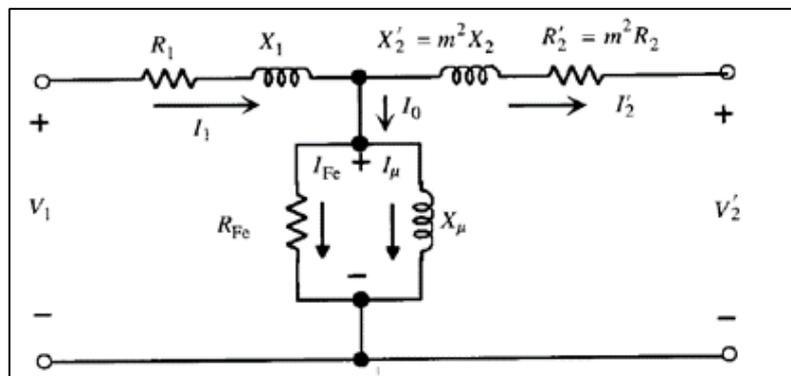
Figura 8.12 Circuito eléctrico equivalente de un transformador sin pérdidas.



Fuente: [2].

En la figura 8.12, se observa que el sentido de la corriente i'_2 es en sentido opuesto al planteado anteriormente, y como se verá más adelante el cálculo no se ve afectado por la misma. Además la reactancia inductiva propia del devanado tanto primario como secundario x_1 , x_2 , se pueden omitir ya que la misma no representa pérdidas significativas dentro del transformador. Se debe tomar en cuenta además que el circuito de la figura 8.12 no toma en cuenta las perdidas por corrientes de Foucault, sin embargo debido a que estas pérdidas generan calor en el núcleo, se los puede modelar añadiendo una resistencia en paralelo con la inductancia mutua, con lo cual se obtiene el circuito completo del transformador tal y como se lo puede apreciar en la figura 8.13.

Figura 8.13 Circuito equivalente del transformador.



Fuente: [4].

9. VALIDACIÓN DE LAS PREGUNTAS CIENTÍFICAS O HIPÓTESIS

Al desarrollar el software para el estudio del comportamiento del transformador, los datos obtenidos del mismo serán semejantes a los datos adquiridos en un transformador real

10. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

10.1 Modelo matemático del transformador

10.1.1 Ecuaciones de estado del transformador

A continuación se utilizará la herramienta que nos ofrece los sistemas de control, para el desarrollo del modelado del transformador. Se utilizará las ecuaciones de estado para desarrollar el circuito equivalente del transformador. Lo que se busca con esto, es lograr una simulación casi exacta del transformador, ya que existen varias formas para realizar dicho modelo, es preferible realizarlo de un modo que las variables involucradas sean las menos posibles pero que con ellas se obtengan resultados similares a los de un transformador real [15].

Las ecuaciones de estado ofrecen una gran viabilidad para el modelamiento de elementos físicos, con los cuales se obtienen resultados similares a los obtenidos en modelos reales. Para el modelamiento en un circuito eléctrico, en [17] menciona que la mejor manera es empezar con aquellos elementos pasivos capaces de almacenar energía, para posteriormente obtener sus ecuaciones de estado.

Para el caso del circuito equivalente del transformador se optará por el mostrado en la figura 8.12, sin embargo se debe tener en cuenta que la corriente i'_2 de la figura será en sentido contrario, se opta por la figura 8.12 en lugar de la 8.13 ya que el modelamiento es más simple, como se aprecia en dicha figura tenemos las inductancias que son elementos pasivos que almacenan energía, por lo tanto las ecuaciones de estado se pueden escribir de la siguiente manera:

$$L_{l1} \frac{di_1}{dt} = v_{Ll1} \quad (10.1a)$$

$$L'_{l2} \frac{di'_2}{dt} = v_{Ll2} \quad (10.1b)$$

Resolviendo las ecuaciones de malla para el circuito del transformador de la figura 8.12 obtenemos las ecuaciones 10.2a y 10.2b.

$$v_1 = i_1 r_1 + v_{Ll1} + v_{Lm1} \quad (10.2a)$$

$$0 = i_2' r_2' + v_{L_{l2}} + v_{L_{m1}} + v_2 \quad (10.2b)$$

Reemplazando las ecuaciones 10.2 dentro de la ecuación 10.1 tenemos:

$$L_{l1} \frac{di_1}{dt} = v_1 - i_1 R_1 - L_{m1} \frac{d(i_1 - i_2')}{dt} \quad (10.3a)$$

$$L_{l2} \frac{di_2'}{dt} = -v_2 - i_2' R_2' - L_{m1} \frac{d(i_2' - i_1)}{dt} \quad (10.3b)$$

Despejando las variables $\frac{di_1}{dt}$, $\frac{di_2'}{dt}$ obtenemos las ecuaciones de estado del circuito eléctrico del transformador.

$$(L_{l1} + L_{m1}) \frac{di_1}{dt} = v_1 - i_1 R_1 + L_{m1} \frac{di_2'}{dt}$$

$$(L_{l2} + L_{m1}) \frac{di_2'}{dt} = -v_2 - i_2' R_2' + L_{m1} \frac{di_1}{dt}$$

$$\frac{di_1}{dt} = \left(v_1 - i_1 R_1 + L_{m1} \frac{di_2'}{dt} \right) \frac{1}{L_{l1} + L_{m1}} \quad (10.4a)$$

$$\frac{di_2'}{dt} = \left(-v_2 - i_2' R_2' + L_{m1} \frac{di_1}{dt} \right) \frac{1}{L_{l2} + L_{m1}} \quad (10.4b)$$

Reemplazando los términos de la ecuación 10.4a y 10.4b con sus respectivos términos obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{di_1}{dt} = \left(v_1 - i_1 R_1 + \left(\left(-v_2 - i_2' R_2' + L_{m1} \frac{di_1}{dt} \right) \frac{L_{m1}}{L_{l2} + L_{m1}} \right) \right) \frac{1}{L_{l1} + L_{m1}}$$

$$\frac{di_1}{dt} = \left(v_1 - i_1 R_1 + \left(-v_2 - i_2' R_2' \right) \frac{L_{m1}}{L_{l2} + L_{m1}} \right) \frac{1}{L_{l1} + L_{m1}} + \frac{L_{m1}^2}{(L_{l2} + L_{m1})(L_{l1} + L_{m1})} \frac{di_1}{dt}$$

Despejando $\frac{di_1}{dt}$ de la ecuación anterior:

$$\frac{di_1}{dt} \left(1 - \frac{L_{m1}^2}{(L_{l2} + L_{m1})(L_{l1} + L_{m1})} \right) = \left(v_1 - i_1 R_1 + \left(-v_2 - i_2' R_2' \right) \frac{L_{m1}}{L_{l2} + L_{m1}} \right) \frac{1}{L_{l1} + L_{m1}}$$

$$\frac{di_1}{dt} = \left(v_1 - i_1 R_1 + \left(-v_2 - i_2' R_2' \right) \frac{L_{m1}}{L_{l2} + L_{m1}} \right) \frac{(L_{l2} + L_{m1})(L_{l1} + L_{m1})}{(L_{l1} + L_{m1})((L_{l2} + L_{m1})(L_{l1} + L_{m1}) - L_{m1}^2)}$$

Eliminando términos semejantes y reordenando la ecuación anterior obtenemos la ecuación de estado para la corriente del primario.

$$i_1 = \int \left(\left(v_1 - i_1 R_1 + (-v_2 - i_2 R_2) \frac{L_{m1}}{L_{l2} + L_{m1}} \right) \frac{L_{l2} + L_{m1}}{\left((L_{l2} + L_{m1})(L_{l1} + L_{m1}) - L_{m1}^2 \right)} \right) dt \quad (10.5)$$

Del mismo modo para i_2 reemplazamos los términos de la ecuación 10.4a y 10.4b para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{di_2}{dt} &= \left(-v_2 - i_2 R_2 + \left(v_1 - i_1 R_1 + L_{m1} \frac{di_2}{dt} \right) \frac{L_{m1}}{L_{l1} + L_{m1}} \right) \frac{1}{L_{l2} + L_{m1}} \\ \frac{di_2}{dt} &= \left(-v_2 - i_2 R_2 + (v_1 - i_1 R_1) \frac{L_{m1}}{L_{l1} + L_{m1}} + \frac{di_2}{dt} \frac{L_{m1}^2}{L_{l1} + L_{m1}} \right) \frac{1}{L_{l2} + L_{m1}} \\ \frac{di_2}{dt} &= \left(-v_2 - i_2 R_2 + (v_1 - i_1 R_1) \frac{L_{m1}}{L_{l1} + L_{m1}} \right) \frac{1}{L_{l2} + L_{m1}} + \frac{di_2}{dt} \frac{L_{m1}^2}{(L_{l1} + L_{m1})(L_{l2} + L_{m1})} \end{aligned}$$

Despejando $\frac{di_2}{dt}$ de la ecuación anterior.

$$\begin{aligned} \frac{di_2}{dt} \left(1 - \frac{L_{m1}^2}{(L_{l1} + L_{m1})(L_{l2} + L_{m1})} \right) &= \left(-v_2 - i_2 R_2 + (v_1 - i_1 R_1) \frac{L_{m1}}{L_{l1} + L_{m1}} \right) \frac{1}{L_{l2} + L_{m1}} \\ \frac{di_2}{dt} &= \left(-v_2 - i_2 R_2 + (v_1 - i_1 R_1) \frac{L_{m1}}{L_{l1} + L_{m1}} \right) \frac{(L_{l1} + L_{m1})(L_{l2} + L_{m1})}{(L_{l2} + L_{m1})(L_{l1} + L_{m1})(L_{l2} + L_{m1}) - L_{m1}^2} \end{aligned}$$

Eliminando términos semejantes y reordenando la ecuación anterior obtenemos la ecuación de estado para la corriente del lado secundario.

$$i_2 = \int \left(\left(-v_2 - i_2 R_2 + (v_1 - i_1 R_1) \frac{L_{m1}}{L_{l1} + L_{m1}} \right) \frac{L_{l1} + L_{m1}}{(L_{l1} + L_{m1})(L_{l2} + L_{m1}) - L_{m1}^2} \right) dt \quad (10.6)$$

Las ecuaciones 10.5 y 10.6 representan las ecuaciones de estado del transformador en función de las corrientes, en [15] se muestra un método similar, la diferencia está en que en dicha bibliografía se utiliza el flujo como variable de estado. Sin embargo estas ecuaciones arrojan los mismos valores que los ya desarrollados anteriormente. Las ecuaciones de estado garantizan una esquematización más amplia de una representación física, en este caso de un transformador eléctrico [18], en donde las corrientes i_1 e i_2 representan las salidas y los voltajes v_1 y v_2 representan las entradas respectivamente.

Como se aprecia en las ecuaciones de estado, los valores propios del transformador están en términos de la inductancia y resistencia, sin embargo, en muy pocas ocasiones se obtiene el

valor de las inductancias de las maquinas, es por eso que es necesario cambiar los valores de la inductancia por sus respectivas reactancias, por ello tomando en cuenta que la reactancia inductiva de una inductancia es igual a $x = j\omega L$, las ecuaciones 10.5 y 10.6 son iguales a:

$$i_1 = \int \left(\left(v_1 - i_1 R_1 + (-v_2 - i_2 R_2) \frac{x_{m1}}{x'_{l2} + x_{m1}} \right) \frac{w(x'_{l2} + x_{m1})}{((x'_{l2} + x_{m1})(x_{l1} + x_{m1})) - x_{m1}^2} \right) dt \quad (10.7a)$$

$$(10.7b)$$

$$i_2 = \int \left(\left(-v_2 - i_2 R_2 + (v_1 - i_1 R_1) \frac{x_{m1}}{x_{l1} + x_{m1}} \right) \frac{w(x_{l1} + x_{m1})}{((x'_{l2} + x_{m1})(x_{l1} + x_{m1})) - x_{m1}^2} \right) dt$$

Las ecuaciones de 10.7 son las necesarias para poder introducirlas en MATLAB, para lo cual se utilizara SIMULINK y se realizará un diagrama de bloques, los diagramas de bloques ayudan a enfocar ecuaciones complejas de una manera más factible y más fácil de manejar [19], [20]. Por lo tanto se necesita modelar los bloques de una manera más fácil por lo que las ecuaciones 10.7a y 10.7b serán reescritas de la siguiente manera.

$$i_1 = \int \left(\left(v_1 - i_1 R_1 - (v_2 + i_2 R_2) \frac{L_{m1}}{K_2} \right) \frac{K_2}{M} \right) dt \quad (10.8a)$$

$$i_2 = \int \left(\left(-v_2 - i_2 R_2 + (v_1 - i_1 R_1) \frac{L_{m1}}{K_1} \right) \frac{K_1}{M} \right) dt \quad (10.8b)$$

Donde:

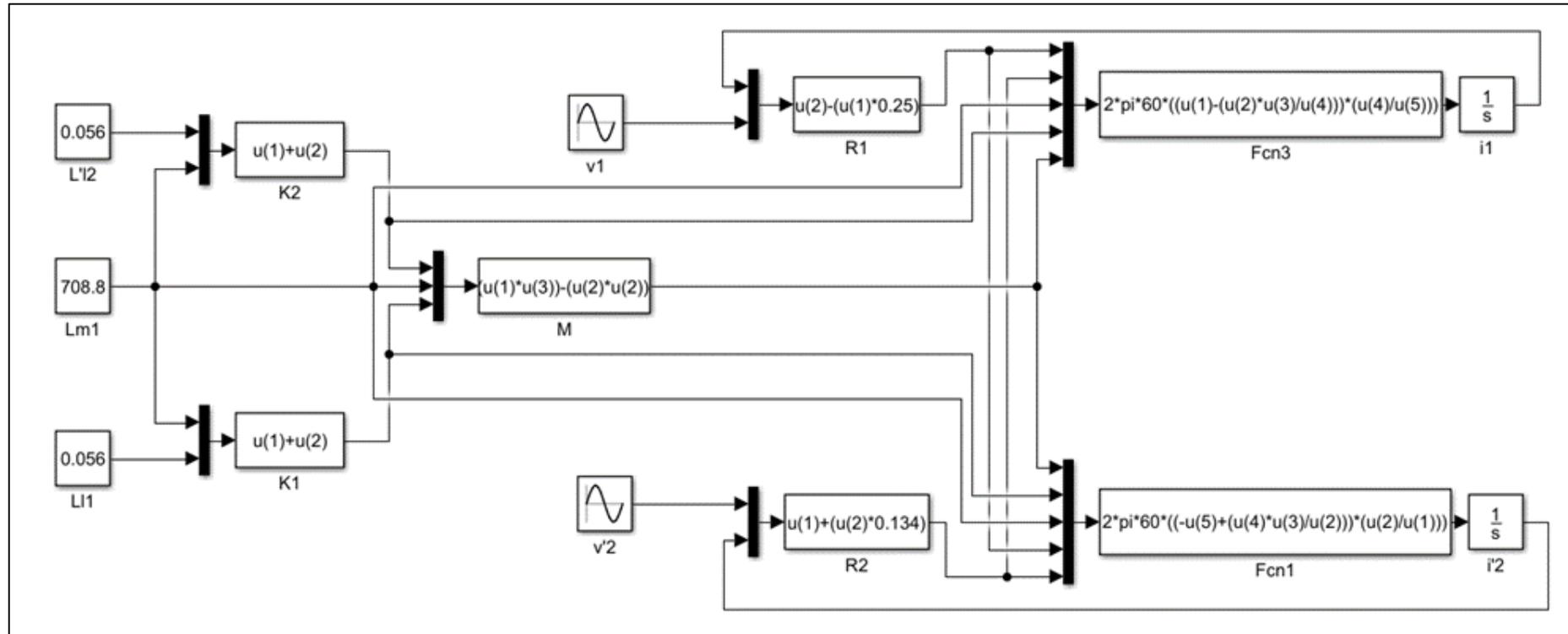
$$K_2 = w(x'_{l2} + x_{m1})$$

$$K_1 = w(x_{l1} + x_{m1})$$

$$M = ((x'_{l2} + x_{m1})(x_{l1} + x_{m1})) - x_{m1}^2 = ((K_1 K_2) - x_{m1}^2)$$

Llevando estas ecuaciones a SIMULINK, se obtiene el siguiente diagrama de bloques que se puede apreciar en la figura 10.1.

Figura 10.1 Diagrama de bloques para un transformador monofásico.



10.2 Incorporación de la carga en el secundario del transformador

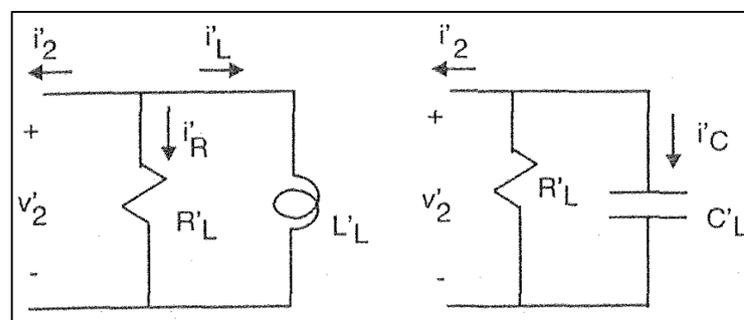
Dentro del estudio de los transformadores, es útil conocer cómo se comporta dicha máquina ante ciertos tipos de carga. Como es el caso existen 3 tipos de cargas que son los más conocidos, las demás son combinaciones de las mismas, estas cargas son denominadas elementos pasivos, se los denomina así debido a que no son capaces de generar energía [21], [22], [23], estos elementos son:

- Inductores
- Capacitores
- Resistencias

Para incorporar la carga al secundario existen diferentes maneras, en [15] se aprecia un método para agrupar varios tipos de elementos pasivos. Para la incorporación de las cargas se utilizara ese método.

En el apartado anterior se obtuvieron las ecuaciones de estado en donde las corrientes son las salidas y los voltajes son las entradas, se puede modelar la carga del secundario de igual manera, en donde la corriente del secundario representa una entrada en el modelo matemático de la carga, y la salida de la misma, será el voltaje, el cual puede incorporarse como entrada en el modelo matemático anteriormente obtenido. Cabe recalcar que este razonamiento puede variar dependiendo de qué variable se tome como entrada y salida. Esto depende de cómo se modele la maquina en cuestión. Se comenzara por modelar dos tipos de circuitos que serán conectadas al transformador, estos se muestran en la figura 10.2.

Figura 10.2 Circuito equivalente del transformador.



Fuente: [15].

Sabemos que la corriente i'_2 representa una salida, mientras que v'_2 es una entrada en el circuito del transformado ya que se lo menciono en el apartado anterior.

Para el modelamiento de la carga la corriente i'_2 se convierte en una entrada, mientras que v'_2 es una salida.

10.2.1 Carga inductiva-Resistiva

Aplicando el concepto con el que se modeló el circuito del transformador, se empezará por modelar el circuito con carga inductiva y resistiva, en donde la bobina es un elemento que almacena energía por lo tanto.

$$L'_L \frac{di'_L}{dt} = v'_L \quad (10.9)$$

Aplicando la ley de corrientes de Kirchoff a la figura 10.2 obtenemos:

$$i'_2 = i'_R + i'_L \quad (10.10)$$

Hay que aclarar que el sentido de la corriente i'_2 se cambió, ya que como es de conocimiento la corriente va hacia la carga, no de la carga hacia el transformador, debido a que esa es la notación estándar que se utilizó para el modelado de esta máquina.

El voltaje en la bobina de carga es igual al voltaje en la resistencia de carga por lo que:

$$v'_L = v'_R = i'_R R'_L \quad (10.11)$$

Reemplazando la ecuación 10.10 y 10.11 dentro de la ecuación 10.9 y despejando i'_L obtenemos:

$$i'_L = \frac{R'_L}{L'_L} \int (i'_2 - i'_L) dt \quad (10.12)$$

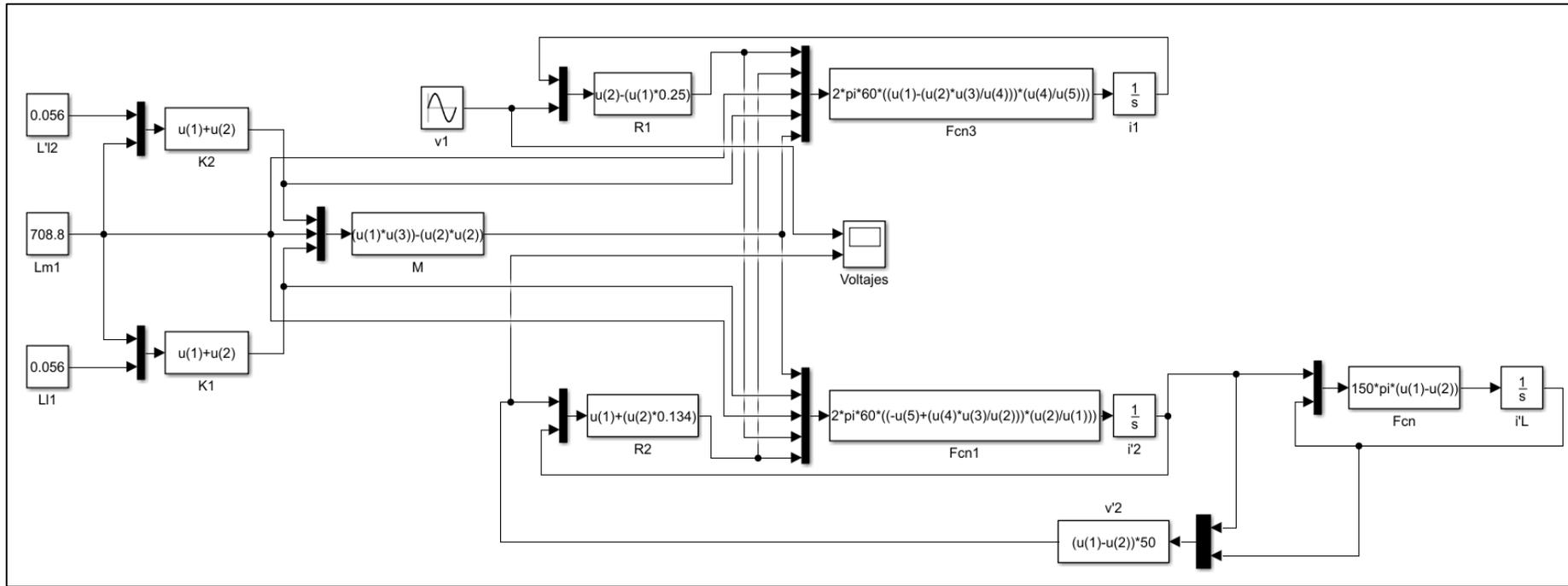
Se aprecia en la ecuación 10.12 que se necesita la corriente i'_2 como entrada para obtener la corriente en la bobina de la carga i'_L . La corriente en la bobina i'_L es útil para obtener el voltaje v'_2 como salida de la siguiente manera:

$$v'_2 = v'_{R'_L} = (i'_2 - i'_L) R'_L \quad (10.13)$$

La ecuación 10.13 es el voltaje de salida de la ecuación de carga, mientras que en el circuito del transformador representa una entrada. Reescribiendo la ecuación 10.12 en base a la reactancia inductiva de la carga x'_L obtenemos:

$$i'_L = \frac{wR'_L}{x'_L} \int (i'_2 - i'_L) dt \quad (10.14)$$

Figura 10.3 Diagrama de bloques de un transformador con carga inductiva y resistiva.



Añadiendo la ecuación 10.13 y 10.14 al diagrama de bloques mostrado en la figura 10.1 se obtiene el diagrama de bloques de la figura 10.3.

Utilizando un transformador estándar monofásico cuyos datos se muestran en la tabla 10.1, los cuales se obtuvieron de la bibliografía [15], se obtienen las siguientes graficas de voltaje y corriente que se aprecian en las figuras 10.4 y 10.5.

Tabla 10.1 Datos de un transformador estándar

Datos	Cantidad
v_1	120 v
v'_2	120 v
x_{l1}	0.056 ohm
x'_{l2}	0.056 ohm
x_m	708.8 ohm
r_1	0.25 ohm
r'_2	0.134 ohm

Figura 10.4 Corriente primaria y secundaria del transformador.



Los datos de la carga inductiva-resistiva colocada se muestran en la tabla 10.2. Y los valores obtenidos tanto de voltaje y corriente se aprecian en la figura 10.6, en donde se colocó un display para obtener los datos RMS tanto de voltaje como de corriente. Estos datos son los que se obtendrían en un transformador real.

Figura 10.5 Voltaje primario y secundario del transformador.

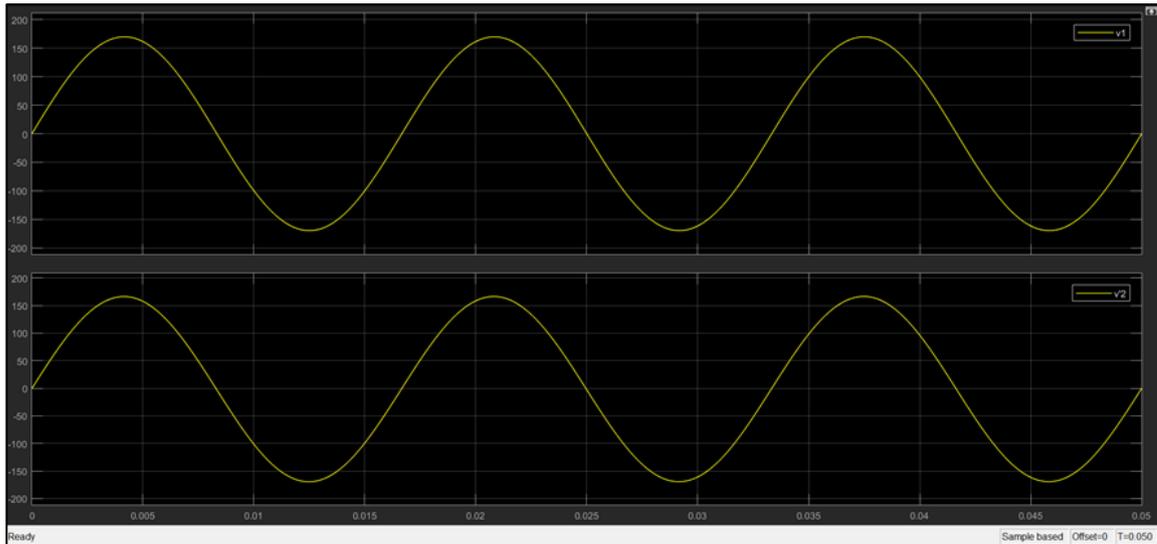
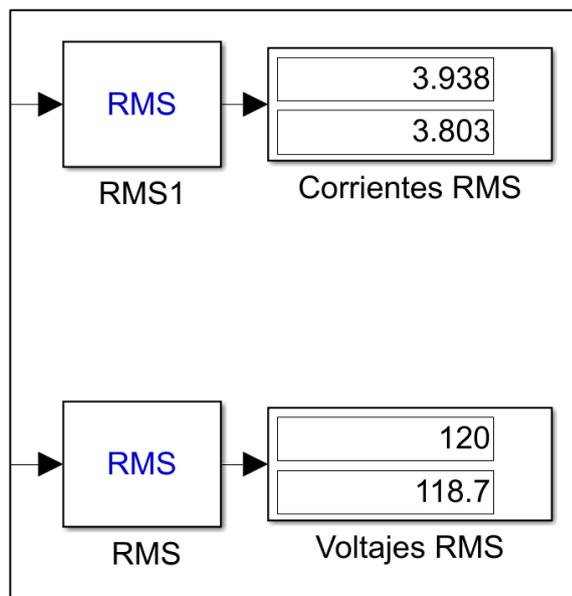


Tabla 10.2 Datos de la carga Inductiva-Resistiva del transformador.

Datos	Cantidad
R'_L	50 ohm
x'_L	j40 ohm

Figura 10.6 Voltajes y corrientes del transformador con carga Inductiva-Resistiva.



Se puede sin embargo modelar la carga del transformador en el dominio de la frecuencia, utilizando la función de transferencia [17]. Este método arroja los mismos datos que los obtenidos anteriormente. Para mostrar dicha similitud reescribimos la ecuación 10.10 de la siguiente manera:

$$i'_2 = \frac{v'_2}{R'_L} + \frac{1}{L'_L} \int v'_2 dt \quad (10.15)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación 10.15 nos queda:

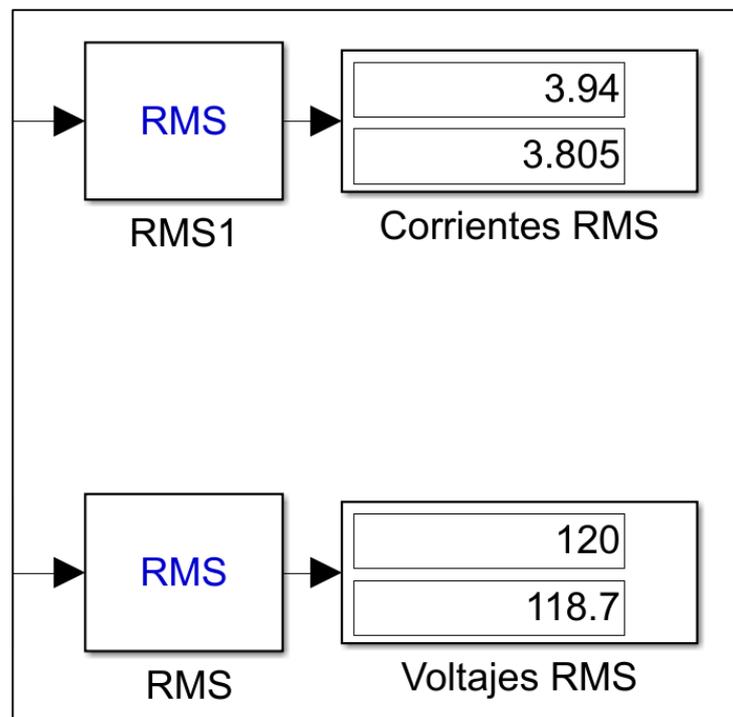
$$I'_2(s) = \frac{V'_2(s)}{R'_L} + \frac{V'_2(s)}{sL'_L} \quad (10.16)$$

Despejando y obteniendo la función de transferencia tenemos:

$$G(s) = \frac{V'_2(s)}{I'_2(s)} = \frac{sR'_L}{s + \frac{R'_L}{L'_L}} \quad (10.17)$$

Llevando la ecuación 10.17 a SIMULINK y añadiéndola al circuito equivalente del transformador se obtienen los datos que se aprecian en la figura 10.7.

Figura 10.7 Voltaje y corriente con carga mediante funciones de transferencia.



Comparando los datos obtenidos tanto de la figura 10.7 como de la figura 10.6, se observan que son muy similares, con un error mínimo. Esto se muestra en la tabla 10.3.

Tabla 10.3 Errores de voltaje y corriente mediante dos métodos diferentes.

Método	Ecuaciones de estado		Función de transferencia		Error de voltaje en %	Error de corriente en %
	Voltajes	Corrientes	Voltajes	Corrientes		
Devanado						
Primario	120	3.94	120	3.938	0	4x10-8
Secundario	118.7	3.805	118.7	3.803	0	4x10-8

El software MATLAB ofrece ciertas ventajas en cuanto a la realización de sistemas grandes y complejos como es en nuestro caso. Los diagramas extensos o que pertenecen a otro sistema pueden ser agrupados en un solo bloque al cual se le puede añadir una denominación. Por ello a la carga Inductiva-Resistiva, se lo asigno como un sub-sistema el cual puede ser incorporado al diagrama del transformador en cualquier momento, esto se muestra en la figura 10.8.

10.2.2 Carga capacitiva-Resistiva

Aplicando el mismo criterio que el caso anterior dentro de la figura 10.2 para la carga capacitiva-resistiva se obtiene las siguientes ecuaciones para el condensador:

$$C'_L \frac{dv'_C}{dt} = i'_C \quad (10.18)$$

Aplicando la ley de corrientes de Kirchoff a la figura 10.2 con carga capacitiva-resistiva tenemos:

$$i'_2 = i'_R + i'_C \quad (10.19)$$

Teniendo en cuenta lo siguiente:

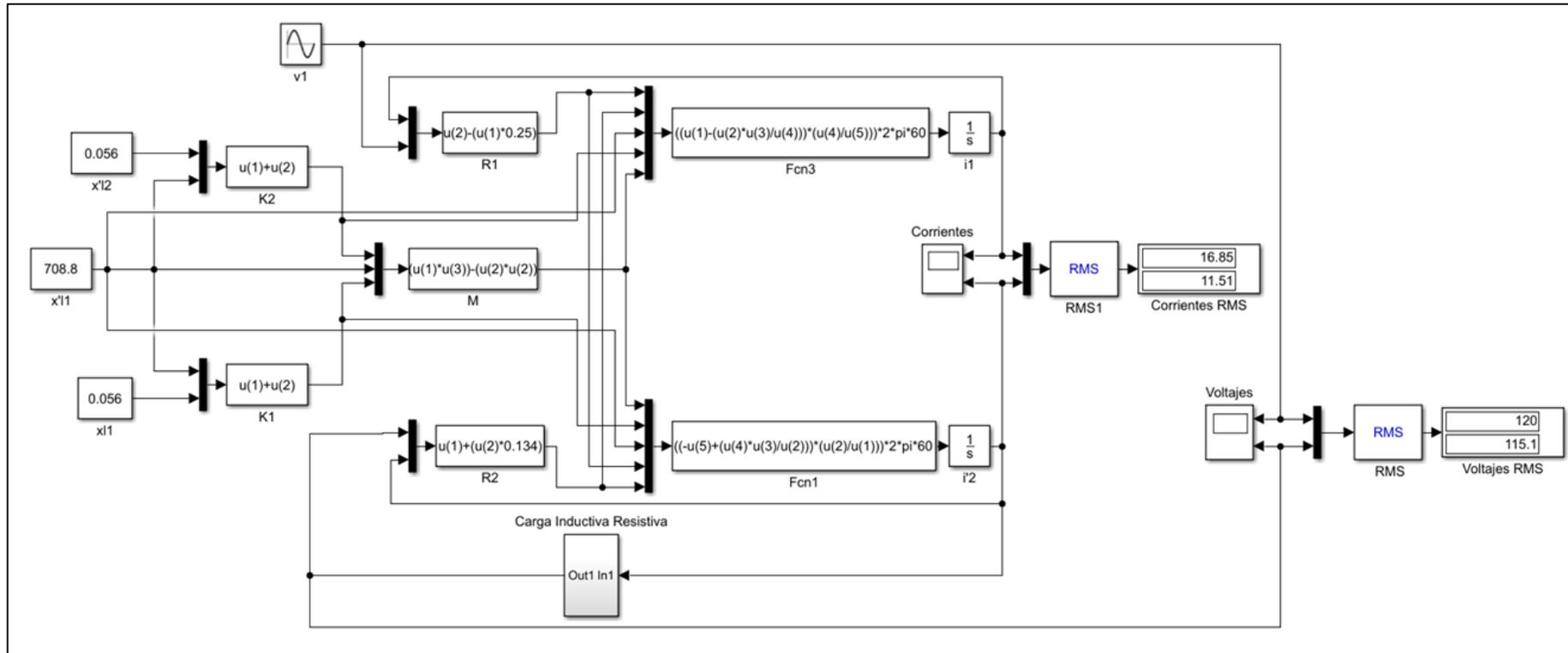
$$v'_C = v'_R = i'_R R'_L \quad (10.20)$$

Se puede despejar v'_C de la ecuación 10.18 y reemplazar la ecuación 10.20 en la nueva ecuación, esto es:

$$i'_R = \frac{1}{C'_L R'_L} \int i'_C dt \quad (10.21)$$

Reemplazando la ecuación 10.19 dentro de la 10.21, obtenemos la ecuación de estado en donde la corriente en la resistencia de la carga es una salida.

Figura 10.8 Diagrama de bloques de un transformador con carga Inductiva Resistiva.



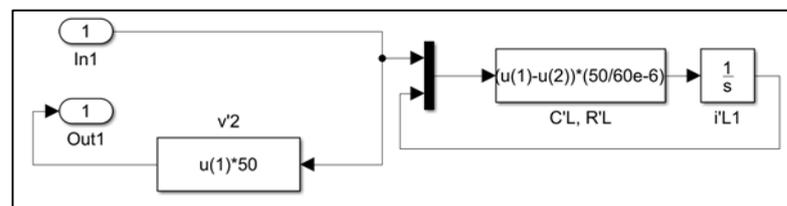
$$i'_R = \frac{1}{C'_L R'_L} \int (i'_2 - i'_R) dt \quad (10.22)$$

La ecuación 10.22 es la ecuación que se incorporara a SIMULINK. Ahora es necesario obtener la ecuación para el voltaje de salida, en base a la ecuación 10.20, el voltaje v'_2 es igual a:

$$v'_2 = i'_R R'_L \quad (10.23)$$

Por lo tanto la ecuación 10.22 y 10.23 representan las ecuaciones de estado para la carga capacitiva-resistiva. Estas se muestran en la figura 10.9, en donde como se aprecia la carga aparece como un pequeño sistema.

Figura 10.9 Diagrama de bloques Capacitiva-Resistiva.



De igual manera que en la carga inductiva capacitiva, se puede obtener los mismos resultados si se simula mediante las funciones de transferencia, en donde como se mencionó anteriormente el error es mínimo.

Las cargas anteriormente vistas pueden ir variando en cuando a los componentes pasivos se refiere, si se desea modelar otro tipo de carga, basta con obtener su función de transferencia o su ecuación de estado, con lo cual se lograra obtener resultados que se asemejen a los obtenidos en un transformador real.

10.3 Incorporación de la saturación al núcleo

En los apartados anteriores ya se había mencionado acerca del bucle de histéresis del transformador. Existen varios métodos para simular la saturación del transformador, de los cuales, su eficacia varia. En [24] se hace un listado de algunos de esos métodos y de la confiabilidad de su uso.

Dentro del transformador, el efecto de la saturación afecta el valor de la inductancia mutua, mientras que en un rango mucho menor también afecta a la inductancia de pérdidas. Aunque es pequeño el efecto que ejerce la saturación a la inductancia de perdidas, es muy complejo obtener

su valor ya que se requiere una cantidad excesiva de datos, los cuales no se encuentran disponibles [15].

Dentro de las simulaciones lo que se busca es simular la variación del flujo mutuo con respecto a la corriente de excitación tal y como se muestra en la figura 8.5, en donde en lugar del campo magnético B se tiene el flujo mutuo ψ_m , o simplemente flujo Φ dentro del núcleo y en lugar de intensidad de campo magnético H se tiene la corriente de excitación i . Esta curva característica es la que permite obtener un modelado para la saturación del transformador.

Principalmente como muestra la ecuación 8.5 es la permeabilidad la que varía, debido a la característica no lineal de la curva de saturación de la carga. La permeabilidad no es más que la habilidad de un material para conducir el flujo [25], es parecido a la conductancia en un circuito eléctrico. Esta permeabilidad al presentar una característica no lineal varía a medida que la corriente de excitación aumenta y por lo tanto al variar la permeabilidad varía la reluctancia del núcleo en diferentes tiempos.

Se debe mencionar que existen diferentes tipos de permeabilidad según sea el punto en el que se lo calcule en la figura 8.5 [25]. La curva en 8.5 puede ser calculada desde las pruebas de circuito abierto del transformador, esto es sencillo de comprender ya que si la corriente en el secundario es cero, entonces la caída de voltaje en la rama serie del transformador será despreciable, mientras que si ignoramos las pérdidas por corrientes parásitas en la rama de magnetización de la figura 8.13 entonces el voltaje en dicha rama será exactamente el voltaje de magnetización y la corriente en esa inductancia será la corriente de magnetización respectivamente. Lo anterior se entiende de la siguiente manera:

Partiendo de la ecuación 10.2a en donde se ha ignorado la rama serie del circuito de la figura 8.13 nos queda:

$$v_1 \approx v_{Lm1} \quad (10.24)$$

Si reescribimos la ecuación 8.33a de igual manera ignorando la rama serie de la figura 8.13 del lado primario obtenemos la siguiente ecuación:

$$v_1 \approx \frac{N_1 d\Phi_m}{dt} \quad (10.25)$$

Si a la ecuación anterior la cambiamos por los enlaces de flujo λ , en donde $\Phi = \lambda / N$, nos queda:

$$v_1 \approx v_{Lm1} = \frac{d\lambda_m}{dt} \quad (10.26)$$

Aplicando la siguiente transformación $d/dt = j\omega$ a la derivada de la ecuación 10.26, se obtiene la siguiente ecuación:

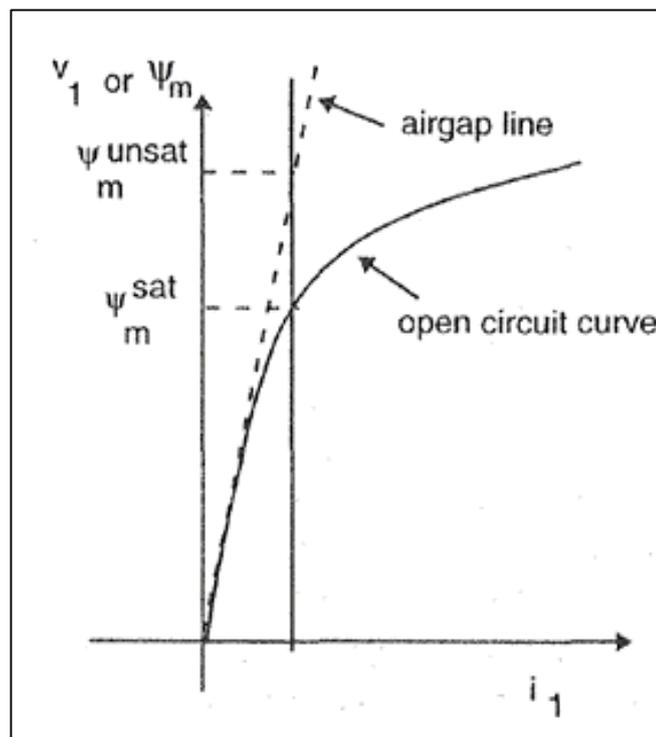
$$v_1 \approx j\omega\lambda_m = \psi_m \quad (10.27)$$

En donde ψ_m representa el flujo mutuo dentro del transformador. Por lo tanto se tiene que el voltaje primario es igual al flujo de la curva de saturación tal y como muestra la ecuación 10.28.

$$v_1 \approx v_{Lm1} \approx \psi_m \quad (10.28)$$

Esto nos ayuda a encontrar la curva de saturación a partir de la curva de circuito abierto de la figura 10.10.

Figura 10.10 Curva de circuito abierto.



Fuente: [15].

Como ya se indicó anteriormente lo que varía principalmente en la curva de saturación del transformador es su permeabilidad, la cual es directamente proporcional a la reactancia mutua, esto se comprueba de la siguiente manera:

Partiendo de la ecuación 8.45 y 8.46 se tiene que la inductancia mutua es igual a:

$$L_m = \frac{N_1 N_1}{\mathfrak{R}_m} \quad (10.29)$$

Reescribiendo la ecuación 10.29 en función de la reactancia inductiva y reemplazando la reluctancia por sus valores en función de la permeabilidad tenemos:

$$x_m = w \frac{N_1^2 A}{l} \mu \quad (10.30)$$

En donde l es la longitud media del transformador en metros y A es el área transversal de la misma en metros cuadrados. Debe mencionarse que μ representa la permeabilidad total del transformador.

Como se aprecia en la ecuación 10.30 la reactancia mutua es directamente proporcional a la permeabilidad del núcleo del transformador, por lo que a medida que la pendiente de la figura 10.10 disminuya, lo ara también la reactancia mutua del transformador. Existen varios métodos para incorporar el efecto de la saturación dentro de las simulaciones del transformador, algunos de estos métodos son:

- a) Aproximando la corriente de magnetización por alguna función analítica del enlace de flujo saturado.
- b) Usando la relación entre el valor saturado y no saturado del enlace de flujo.
- c) Usando el apropiado valor saturado de la reactancia mutua en cada tiempo de la simulación.

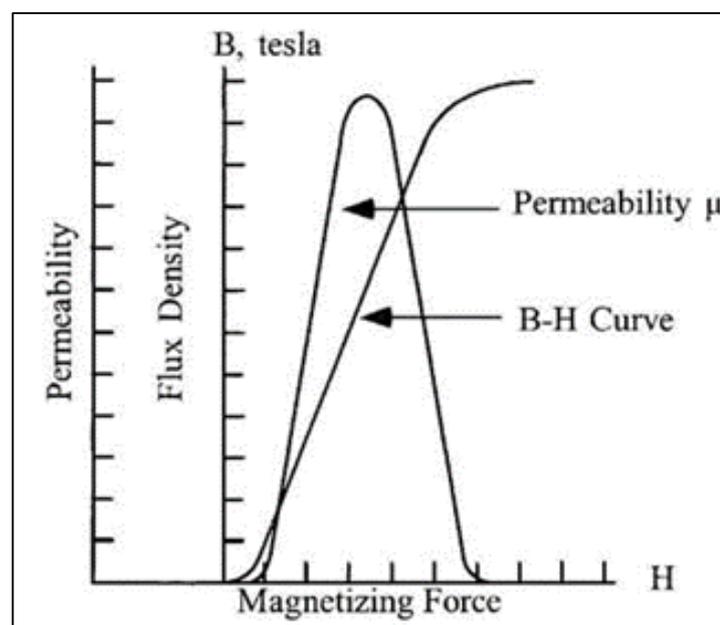
En a) se utiliza la prueba de circuito abierto con un voltaje aumentando su amplitud en intervalos a medida que se obtiene el valor de la corriente sin carga del primario, en [26] se muestra un método que resulta en el cálculo casi exacto de la curva de saturación, pero sus métodos son complicados y no reflejan resultados plausibles. Sin embargo en [15] y [27] se muestra un método más eficaz para el cálculo de la curva de saturación a partir de los valores RMS tanto de voltaje como corriente de excitación, dentro de este método se obtienen valores instantáneos del flujo y corriente de magnetización, es un método iterativo que requiere mucho tiempo de cálculo, pero sin embargo garantiza datos cercanos a los de una curva de saturación real.

En b) se utiliza la diferencia entre el valor saturado del flujo para obtener la característica no lineal de la curva. En este caso se utiliza a menudo una aproximación de la curva de saturación,

esta función puede diferir tal y como se presenta en [28], pero sin embargo resulta útil cuando no se tiene los datos reales de la curva de saturación de transformador.

En método descrito en c) utiliza valores apropiados de la reactancia en cada tiempo de simulación, por lo que ese será el método que se utilice para la simulación del transformador en este caso. Como se mencionó anteriormente, a medida que la pendiente de la curva de saturación avanza en el tiempo, el valor de la reactancia mutua disminuye, o que es lo mismo, el valor de la permeabilidad disminuye, esto se puede apreciar en la figura 10.11.

Figura 10.11 Variación de la Permeabilidad a lo largo de la curva de Magnetización.



Fuente: [25].

Como se ve en la figura 10.11, el valor de la permeabilidad μ contra la intensidad de campo magnético H es una senoide con un periodo igual a π . Es decir que la permeabilidad realiza un periodo de π radianes cuando la curva de saturación realiza un periodo de $\pi/2$ radianes. Es decir la senoide de la permeabilidad tiene el doble de periodo que la curva de magnetización. En el caso que nos compete, la permeabilidad μ contra el tiempo es una senoide desplazada que no tiene valores negativos y en donde su límite tiende a cero. Para obtener dicha senoide en SIMULINK se utilizara el bloque denominado **Z-shaped MF**, mientras que para obtener el doble periodo de la permeabilidad se utiliza un bloque **Sine Wave**, esta configuración se muestra en la figura 10.12, y la gráfica de la curva para un periodo de 1/60 s se muestra en la figura 10.13.

Figura 10.12 Incorporación de la saturación al diagrama del transformador.

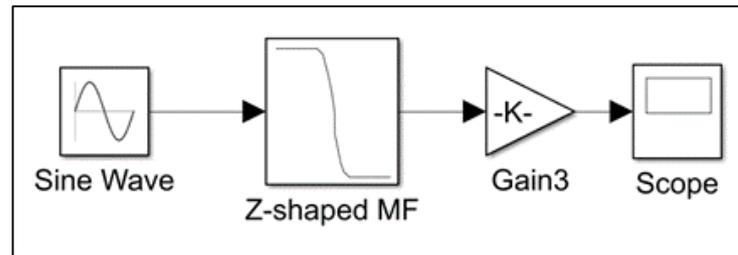
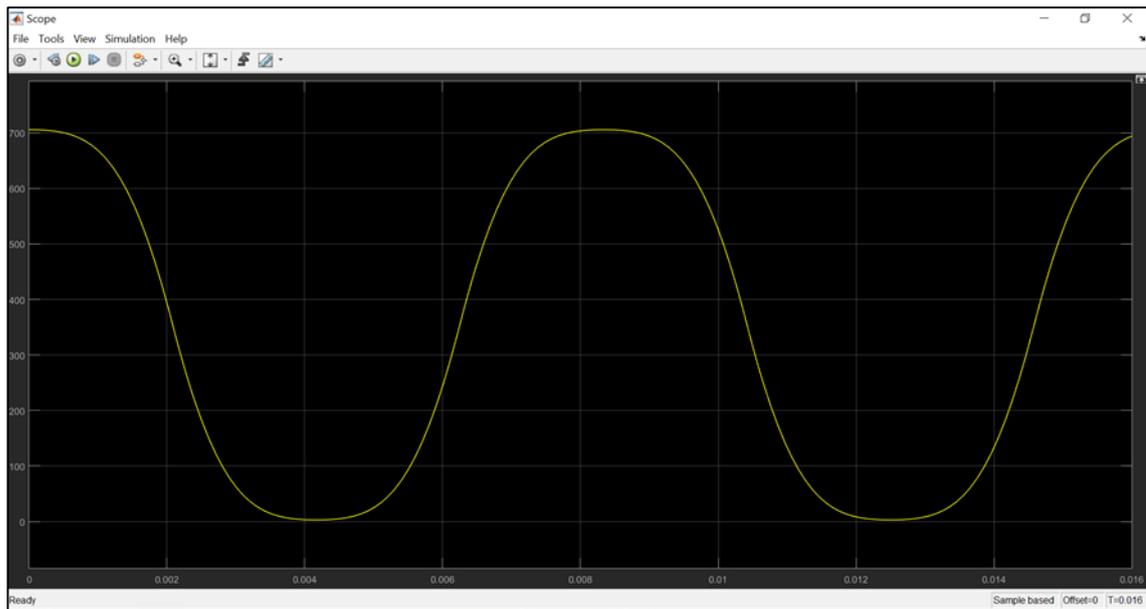


Figura 10.13 Curva de la reactancia mutua para la saturación del transformador.



Debe notarse que en la figura 10.12 el bloque **Gain** representa el valor de la reactancia mutua no saturada, ya que esta va decreciendo a medida que la permeabilidad disminuye, esto debido a que esta es directamente proporcional como se demostró anteriormente. Los datos de la reactancia mutua x_m se muestran en la tabla 10.4, en donde se obtuvieron datos de la reactancia mutua en diferentes tiempos.

Se debe tener en cuenta que los datos obtenidos en la tabla 10.4 son los de un transformador que está trabajando por sobre la rodilla de la curva de saturación de la figura 8.5, en los transformadores reales la reactancia mutua no varía demasiado como se muestra en la tabla 10.4, ya que si lo hace esto conllevaría a sobrecorrientes desbalanceadas en los bancos trifásicos formados a través de bancos monofásicos. En realidad la reactancia mutua tiende a variar un poco solamente ya que como se mencionó anteriormente, en los transformadores reales se trabaja hasta la rodilla de la curva de saturación, ya que después que se cruza la rodilla de saturación la permeabilidad se vuelve constante [25].

Tabla 10.4 Reactancia mutua en un transformador saturado.

xm	Tiempo
705.871074380165	0
705.871071493850	4.16348033373747e-07
705.871001142640	2.09725014689172e-06
705.870462048560	6.06411015768249e-06
705.868601214825	1.21861632749897e-05
705.862361893308	2.28665085217653e-05
705.843599167795	4.05755781440404e-05
705.751331960003	8.43909501701990e-05
705.094092262508	0.000209794620853608
699.100959439843	0.000540760910690864
652.629954235442	0.00112364736087594
505.996550522638	0.00172364736087594
306.805681959458	0.00218492618287984
120.403180145664	0.00271556559388178
26.1725703353154	0.00331556559388178
4.15928869954970	0.00390657581790603

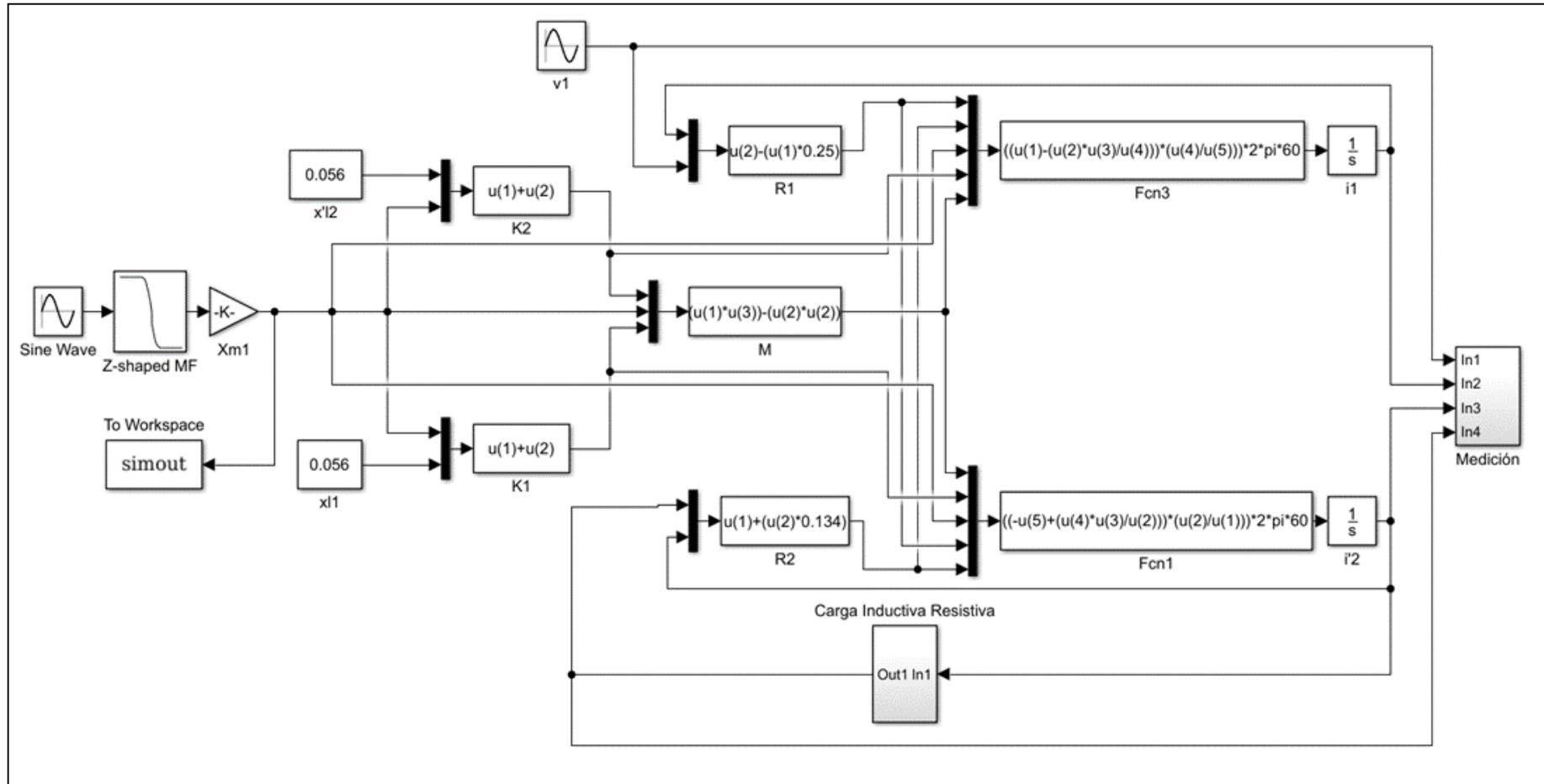
Incorporando la saturación al diagrama de bloques de la figura 10.8, en lugar del bloque de la reactancia mutua, se obtiene el diagrama de la figura 10.14. En dicha figura se observa que se ha realizado un sub-sistema a los bloques de medición, esto con el fin de ahorrar espacio y para que el diagrama se encuentre más presentable.

Se observa además que se ha incorporado un bloque denominado **To Workspace**, el cual es un almacenador de datos de los valores de la reactancia mutua con el que se obtuvo los datos mostrados en la tabla 10.4. Este bloque es muy útil para el almacenamiento de datos para futuros proyectos.

Para variar la curva de saturación de la reactancia mutua se procede a dar clic en el bloque **Z-shaped MF**, los datos estándar con el que se realizó la gráfica se muestran en la figura 10.15. Para variar la curva de la reactancia mutua se procede a elevar los valores expuestos en la figura 10.15, es decir para que la saturación sea menor se debe ir aumentando los valores expuestos en la figura 10.15.

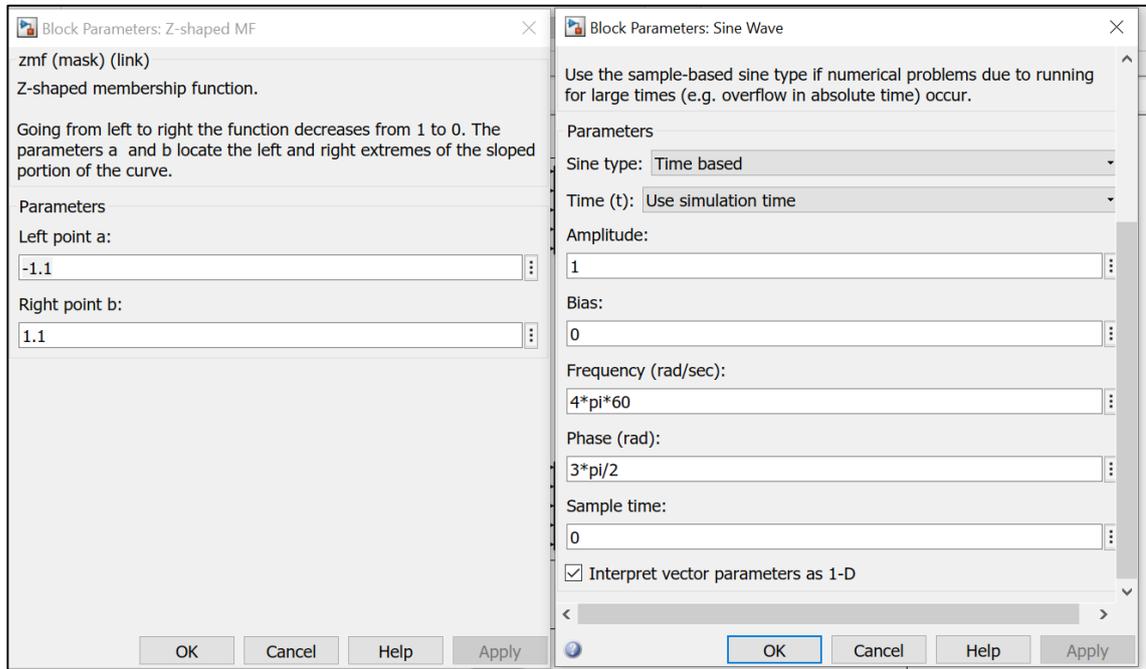
Para los datos del bloque **Sine Wave**, se tiene que colocar en una amplitud igual a 1 y la frecuencia será igual a $4 \cdot \pi \cdot 60$, mientras que el desfase será de $3 \cdot \pi / 2$, esto puede ser visto en la figura 10.15 también. Los valores ya expuestos anteriormente pueden ir variando dependiendo de qué comportamiento se quiera obtener con la reactancia mutua, si se desea obtener solo la reactancia no saturada, entonces se cambia el diagrama de bloques de la figura 10.12, por el mostrado en la figura 10.8 anteriormente.

Figura 10.14 Diagrama de bloques del transformador con saturación incorporada.



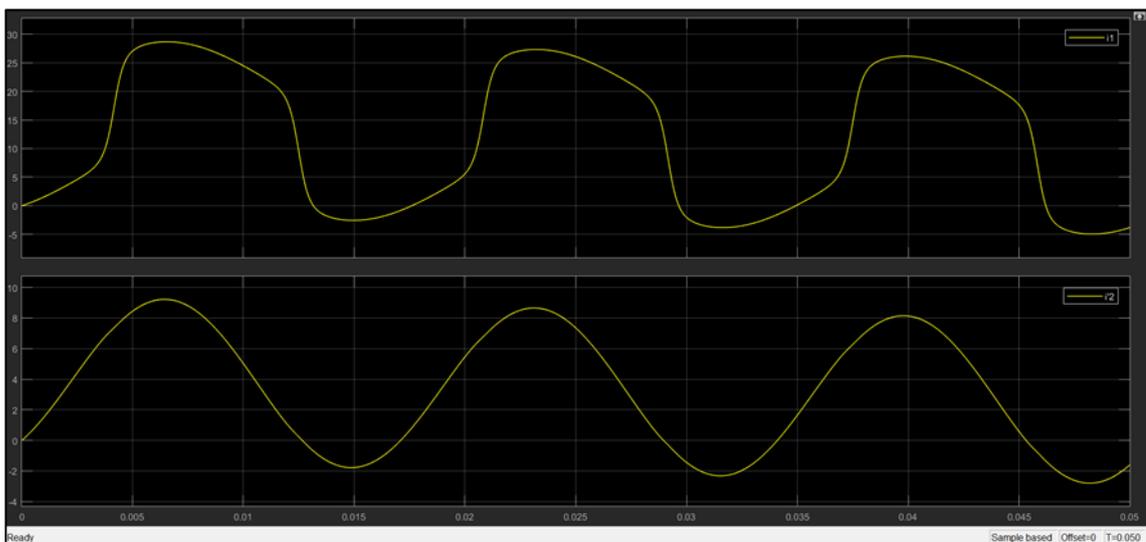
Los datos introducidos en el diagrama de la figura 10.14 son los mismos que en el diagrama de la figura 10.3, los valores de la carga Inductiva-Resistiva tampoco han cambiado.

Figura 10.15 Parámetros a introducir en el diagrama de la figura 10.12.



La grafica de la corriente primaria i_1 y corriente secundaria i'_2 se muestra en la figura 10.16 para un periodo de 0.05 segundos.

Figura 10.16 Corriente primaria y secundaria del transformador con saturación.



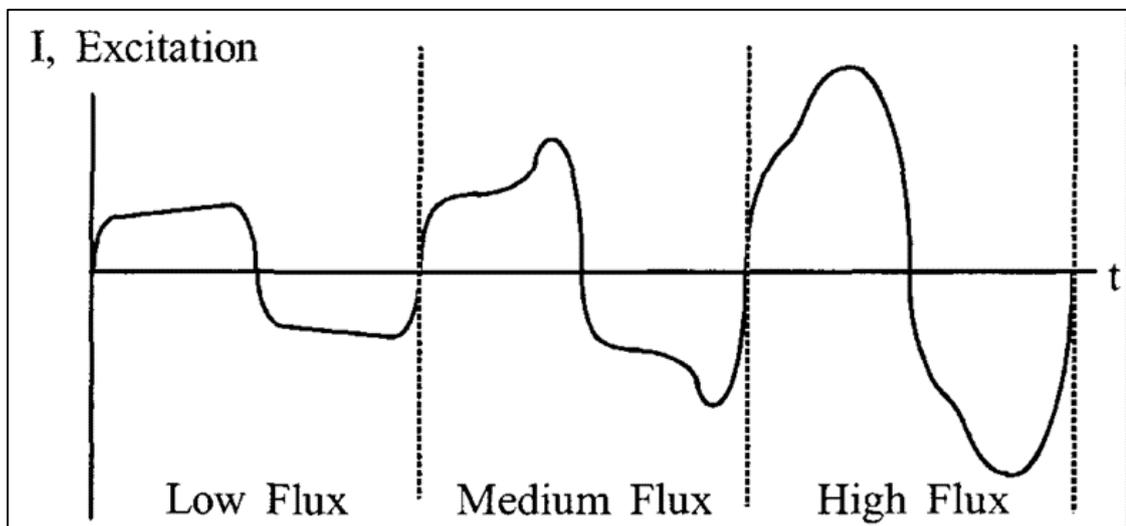
Para tener una idea más clara de la forma acampanada de la corriente i_1 del primario de la figura 10.16, en [25] se muestran diferentes tipos de corrientes de excitación las cuales dan una idea

más clara de las diferentes formas de corrientes de excitación que existen en función de los niveles de densidad de flujo B . Esto se puede apreciar en la figura 10.17.

Comparando la forma de onda de la corriente i_1 de la figura 10.16, con alguna de las formas de onda de corriente de la figura 10.17, se ve que la más parecida es aquella en donde se tienen bajo flujo, y eso resulta obvio ya que el diseño del transformador realizado en nuestro caso posee datos de un transformador ficticio que se obtuvieron de la bibliografía [15].

Se debe destacar además que aquellos transformadores que se utilizan en la industria de la ingeniería eléctrica son aquellos con aleaciones de acero al silicio, esa combinación es de interés para los fabricantes de transformadores, ya que estos prefieren tamaño y eficiencia, un menor tamaño del transformador resulta en una menor eficiencia, mientras que en un mayor tamaño del núcleo del transformador se obtiene una mayor eficiencia. Por otra parte a un mayor tamaño se obtiene mayores niveles de flujo, pero resulta costoso en cuanto a la fabricación, por lo que se opta por transformadores de menor tamaño en donde se tiene menores cantidades de flujo [25].

Figura 10.17 Corriente de excitación, en diferentes niveles de densidad de flujo, B .



Fuente: [25].

10.3.1 Armónicos de la corriente de vacío

En el instante en que un transformador trabaja en vacío, la corriente del primario (corriente de vacío) experimenta una forma acampanada tal y como muestra en las figuras 10.17 y 10.18, esta corriente la cual se forma cuando se trabaja con un transformador saturado tiene ciertas componentes armónicas.

Un desarrollo de análisis de Fourier realizado en Matlab al esquema propuesto, se muestran en la figura 10.19, en donde se ha modelado el sistema con una carga resistiva elevada, para tener el carácter de un circuito abierto.

Figura 10.18 Corriente de excitación del transformador con saturación trabajando en vacío.

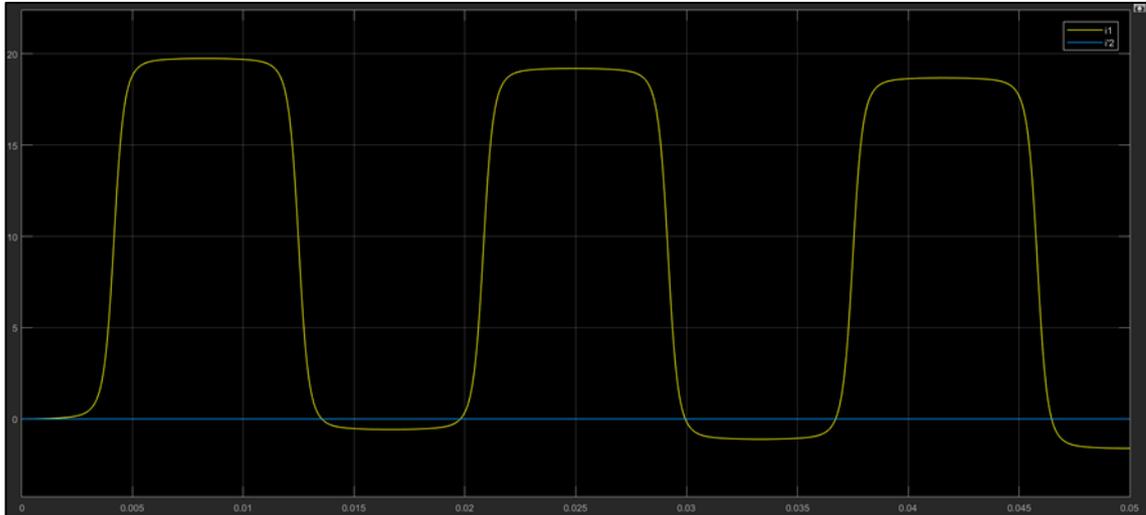
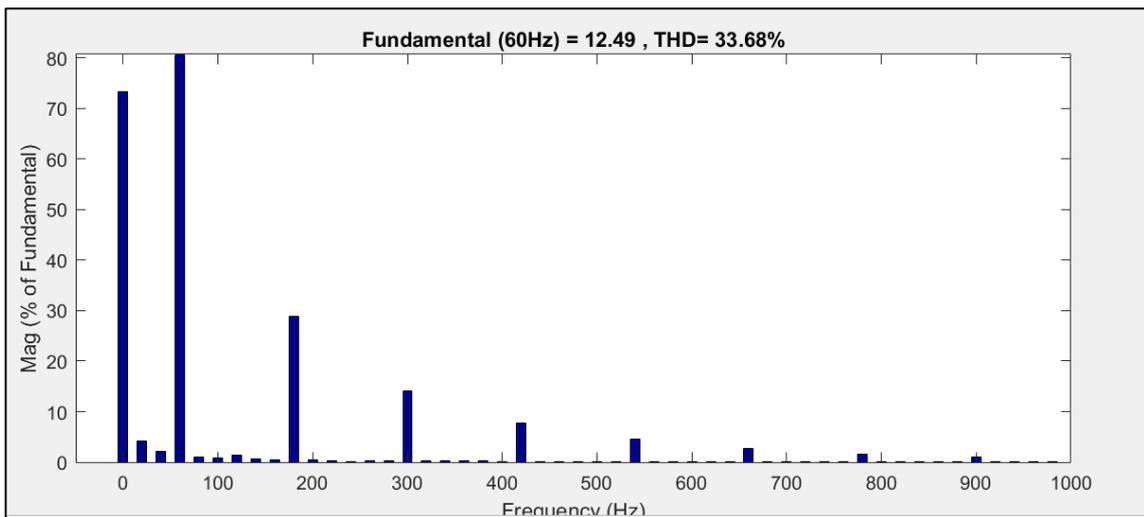


Figura 10.19 Análisis de armónicos a la corriente de excitación de la figura 10.18.



Los datos obtenidos en el análisis de Fourier se muestran en la figura 10.20.

En [4] se detalla la cantidad del reparto de armónicos que se obtendrían en un caso real, en dicha bibliografía se menciona lo siguiente: 45 por 100 de tercer armónico, 15 por 100 del quinto, 3 por 100 del séptimo y porcentajes menores para armónicos de mayor orden.

Comparados con los valores mostrados en la figura 10.20, en donde se tiene 28.96 por 100 del tercer armónico, 14.06 por 100 del quinto y 7.77 por 100 del séptimo, se ve que son valores cercanos a los de un transformador real.

Figura 10.20 Componentes armónicos relativos a la frecuencia fundamental.

0 Hz	(DC) :	73.36%	90.0°
20 Hz		4.19%	2.1°
40 Hz		2.17%	1.8°
60 Hz	(Fnd) :	100.00%	-89.1°
80 Hz		1.03%	2.2°
100 Hz		0.85%	3.1°
120 Hz	(h2) :	1.34%	0.9°
140 Hz		0.61%	0.2°
160 Hz		0.51%	0.6°
180 Hz	(h3) :	28.96%	89.3°
200 Hz		0.44%	1.5°
220 Hz		0.39%	0.9°
240 Hz	(h4) :	0.09%	9.3°
260 Hz		0.32%	3.9°
280 Hz		0.31%	4.0°
300 Hz	(h5) :	14.06%	-88.4°
320 Hz		0.25%	3.8°
340 Hz		0.25%	4.8°
360 Hz	(h6) :	0.37%	2.7°
380 Hz		0.22%	3.7°
400 Hz		0.20%	4.1°
420 Hz	(h7) :	7.77%	89.0°
440 Hz		0.20%	5.4°
460 Hz		0.19%	5.0°

10.3.2 Comportamiento del flujo magnético del núcleo

A continuación se analizará el comportamiento del flujo magnético dentro del núcleo. Partiendo de la ecuación 10.26, en donde se puede reescribir usando el último término del lado derecho de la ecuación 8.46 a o b tenemos:

$$v_{Lm1} = \frac{d\lambda_m}{dt} = L_m \frac{di_m}{dt} \quad (10.31)$$

La ecuación 10.31 muestra que el flujo magnético mutuo que circula dentro del núcleo es igual a:

$$\lambda_m = \frac{x_m}{w} i_m \quad (10.32)$$

En donde i_m (Amperios) representa la corriente mutua total existente dentro de la reactancia mutua, esta corriente mutua depende del tipo de conexión en el que se encuentre el transformador (aditiva o sustractiva). Desarrollando la ecuación 10.32 para una conexión sustractiva que es nuestro caso obtenemos:

$$\lambda_m = \frac{x_m}{w} (i_1 - i'_2) \quad (10.33)$$

10.3.2.1 Comportamiento del flujo magnético sin saturación

En el caso en el cual el núcleo no se encuentre saturado, es decir si se encuentra trabajando bajo la rodilla de saturación de la figura 8.5 o 10.10, se tendrá una onda sinusoidal de flujo. Para

observar de mejor manera el comportamiento de la onda senoidal del flujo se trabajara con un transformador sin carga, es decir con $i'_2 = 0$.

Incorporando la ecuación 10.33 al diagrama de bloques de la figura 10.1, en donde se ha agregado un bloque con una carga resistiva para simular el comportamiento sin carga del transformador, se procede a agregar un bloque **Fcn** y restar las salidas de la corriente e incorporar el valor de la reactancia mutua. Esto se puede apreciar en la figura 10.21.

Cuando un transformador trabaja bajo la rodilla de saturación, es decir, cuando su reactancia mutua es constante, la onda senoidal del flujo se encuentra desfasada $\pi/2$ radianes de la onda de voltaje de la fuente, mientras que la corriente se encuentra en fase con la onda de flujo mutuo [4].

Una esquematización que se puede apreciar en la figura 10.22, muestra las tres ondas y confirma lo anteriormente mencionado. En dicha figura se observa que la onda fundamental de voltaje se encuentra adelantada $\pi/2$ radianes con respecto a la onda de flujo mutuo, mientras que esta última se encuentra en fase con la onda senoidal de corriente primaria i_1 .

10.3.2.2 Comportamiento del flujo magnético con saturación

Incorporando la ecuación 10.33 al diagrama de la figura 10.14, se puede obtener la gráfica del comportamiento del flujo magnético cuando el transformador trabaja saturado, es decir, sobre la rodilla de la curva de magnetización, y en vacío, cuando la corriente del secundario es igual a cero.

En [4] y [15] mencionan que cuando el transformador trabaja en la zona saturada, la corriente ya no será sinusoidal, sino más bien experimentara una forma acampanada como ya se mencionó anteriormente y como se puede observar en las figuras 10.17 y 10.18, en dicha bibliografía menciona también que si la corriente sufre esa deformación, el flujo mutuo se mantendrá con una forma senoidal pura sin ninguna deformación, esto debido a que no existe herramienta grafica que permita conocer como es en realidad el comportamiento del flujo magnético.

Figura 10.21 Incorporación del bloque del flujo magnético en un transformador no saturado.

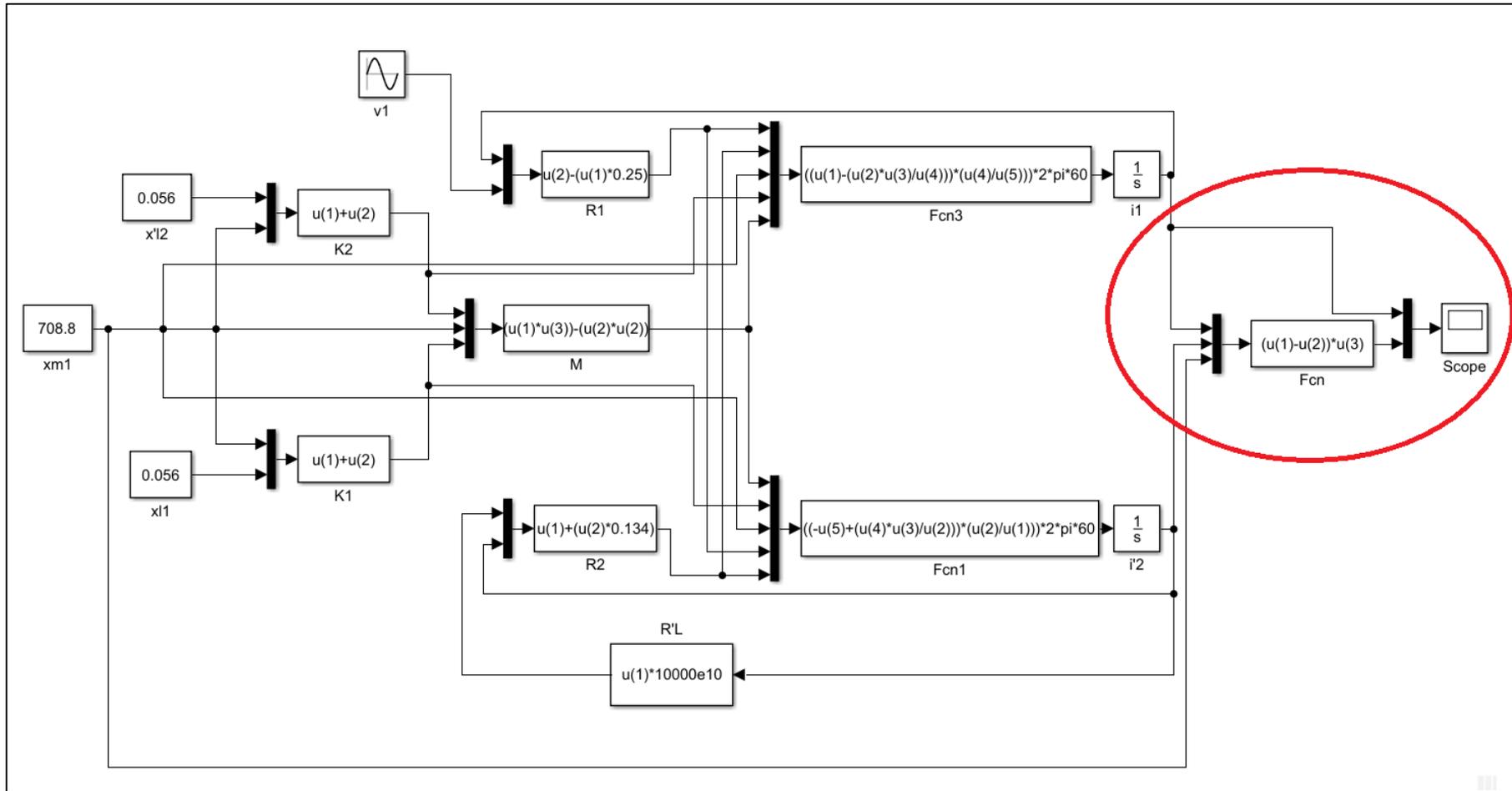
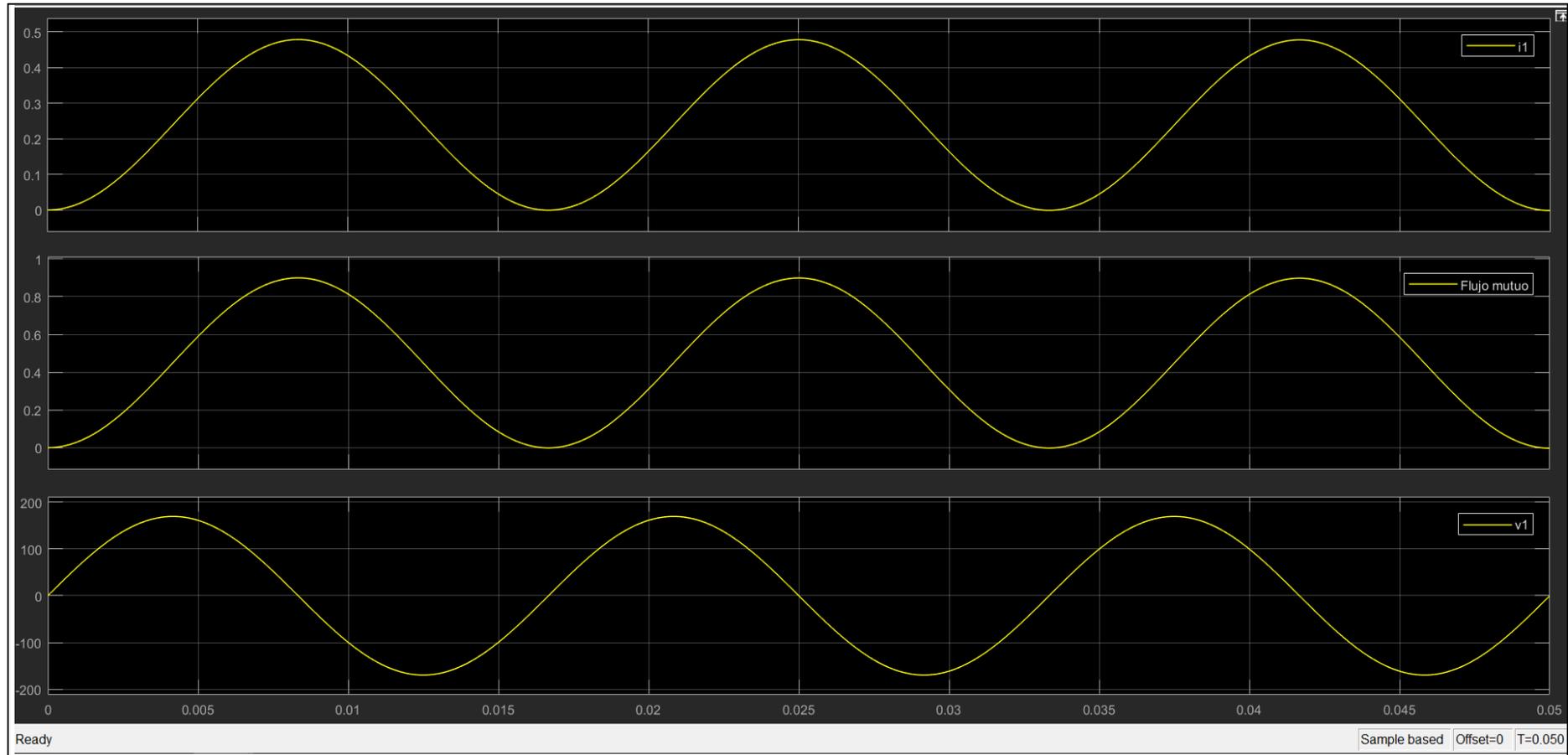


Figura 10.22 Grafica de voltaje, corriente y flujo mutuo en un transformador sin carga no saturado.



Sin embargo estas dos últimas ondas ya no se encontraran en fase, es decir que sufrirán un ligero desplazamiento una con respecto a la otra, esto debido al carácter no lineal de la reactancia de magnetización.

Obteniendo las gráficas respectivas tanto de voltaje, flujo y corriente en nuestro diagrama de bloques del transformador, se observa que el flujo no es completamente sinusoidal ya que tiene una cierta característica acampanada la cual se lo puede observar en la figura 10.23, esto quiere decir que la onda de flujo, no es ciertamente una senoide pura como se aprecia en la figura 10.23.

Esto sin embargo no afecta al voltaje secundario obtenido ni a la corriente secundaria como se verá más adelante.

10.3.2.3 Comportamiento del transformador saturado bajo carga

Ahora se analizara las formas de onda tanto de voltajes y corrientes del transformador, analizando las formas de onda que arroja en el diagrama de bloques de la figura 10.14.

Se puede apreciar en la figura 10.24, que el voltaje secundario es completamente sinusoidal a pesar de que el flujo mutuo no es una senoide completa, por otro lado la corriente secundaria también tiene característica senoidal a diferencia de la corriente primaria que tiene una forma acampanada y una amplitud más alta.

La amplitud elevada de la corriente primaria, tiene que ver con el hecho de que en el momento de energizar un transformador se tiene un efecto conocido como corriente INRUSH, que a menudo se confunde con un cortocircuito, el análisis de este tipo de corriente se lo realizara más adelante.

Debe notarse que el carácter no senoidal del flujo mutuo de la figura 10.23 no afecta en la calidad de onda tanto del voltaje como corriente secundaria, con lo que se comprueba que cuando un transformador trabaja en la zona saturada, la onda de flujo no es completamente sinusoidal

Figura 10.23 Graficas de voltaje, corriente y flujo mutuo en un transformador sin carga saturado.

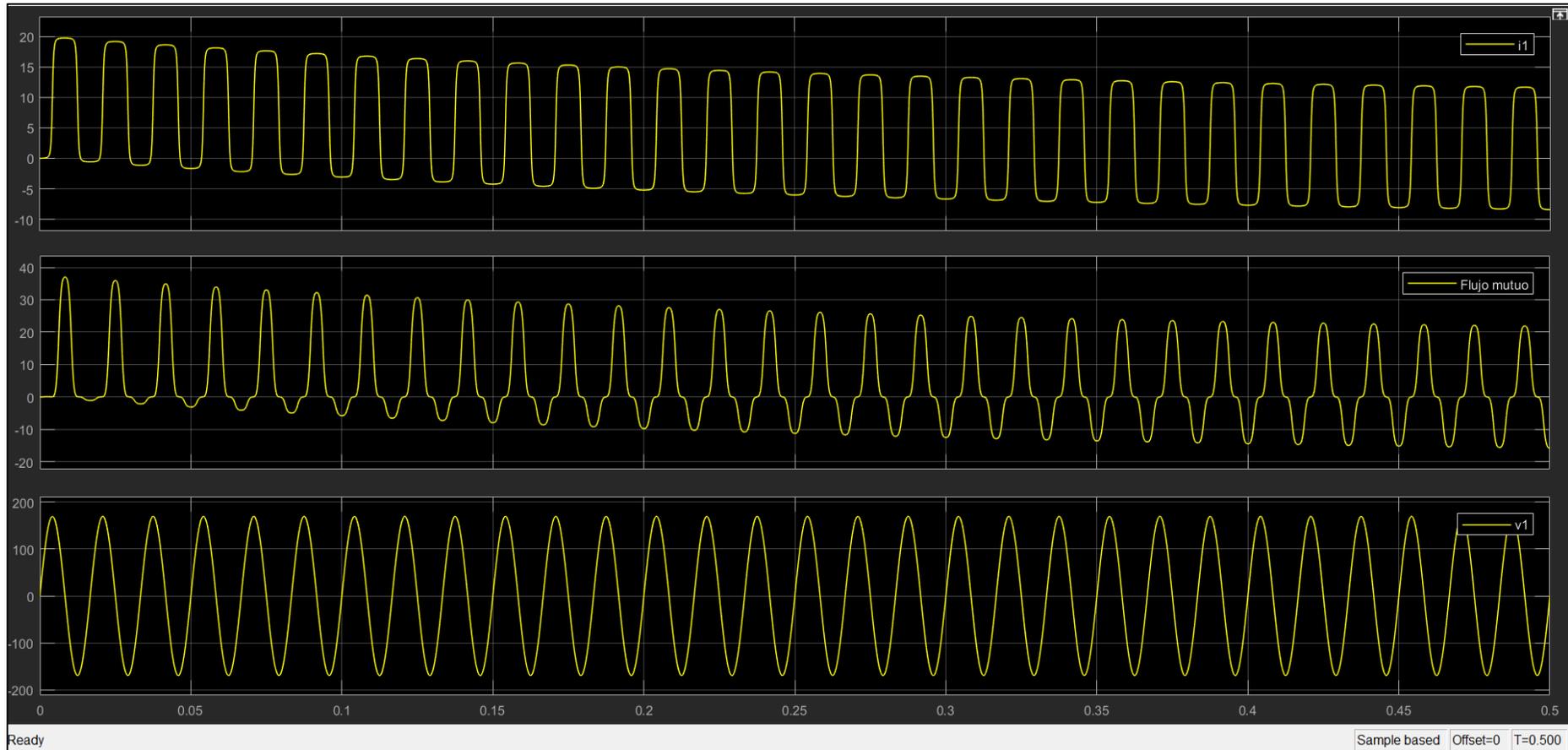
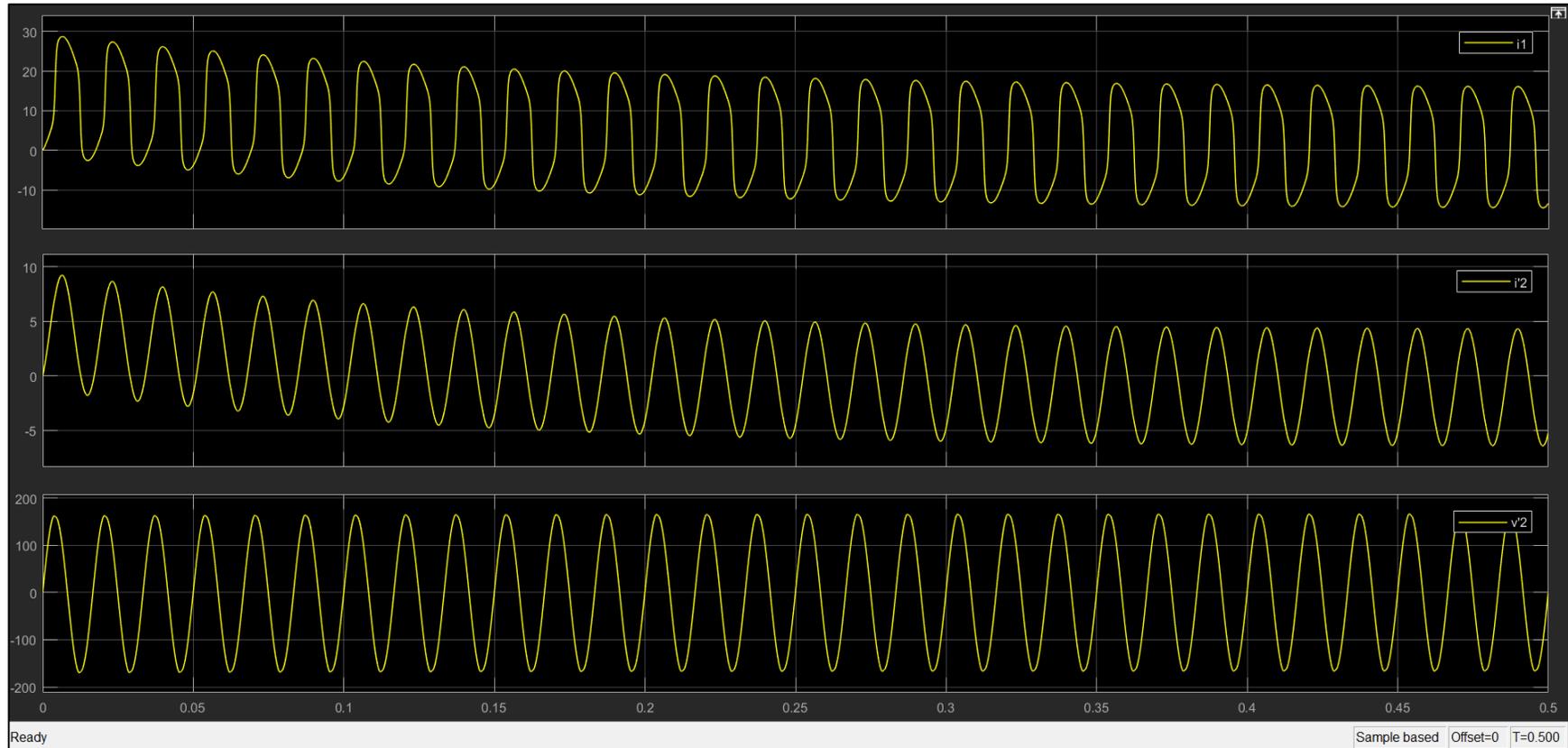


Figura 10.24 Graficas de voltaje secundario, corrientes primaria y secundaria en un transformador con carga saturado.



10.4 Análisis de la corriente Inrush del transformador

Cuando el transformador es energizado, en un tiempo dado, solo la corriente del primario es la que fluye en un principio, haciendo que el transformador trabaje en circuito abierto, ya que la corriente secundaria es igual a cero.

Esta corriente de excitación en ocasiones toma valores casi similares a la de una corriente de cortocircuito, por lo que a menudo en la antigüedad se lo llegaba a confundir con un cortocircuito [4]. A este tipo de corrientes se le denomina corriente inrush.

La corriente inrush fluye solamente en un devanado del transformador, esto resulta en grandes corrientes diferenciales los cuales ocasionan a menudo la operación errónea del relé diferencial [7]. En la actualidad existen varias herramientas para mitigar este tipo de corrientes [29], o simplemente para evitar que se active el relé diferencial del transformador. Los autores de diferentes tratados coinciden en que una de las principales características de la corriente inrush es su componente de segundo armónico, en donde según [7], la transformada de Fourier es la herramienta más comúnmente usada para obtener la componente armónica de la señal de corriente adquirida.

En [7] y [29] se da una lista de las principales fuentes que provocan la corriente inrush, estas son:

- La no linealidad del núcleo del transformador.
- Saturación de los transformadores de corriente.
- Sobreexcitación del transformador debido a condiciones de sobrevoltaje dinámico.
- Magnetización residual del núcleo.
- Instante de swiching.

En [7] se muestra un estudio detallado de como el tipo de material con el que está hecho el núcleo afecta a la corriente inrush. Mientras que en [25] se responde qué esos fenómenos se deben a los diferentes niveles de flujo que se tiene en cada material del núcleo. Sin embargo en [30] se muestra una simulación del instante de swiching de un transformador trifásico en donde se observa las componentes armónicas debido a la corriente inrush.

En lo que respecta al estudio de la corriente inrush en nuestro modelo, se tomara en cuenta la corriente inrush debido al flujo remanente dentro del núcleo, en [4] se muestra como el flujo remanente afecta al valor de la corriente inrush el cual será demostrado como sigue:

En nuestro modelo se situó el voltaje primario como una onda senoidal, esto se puede ver claramente en la figura 10.23, por lo que si colocamos la forma de onda de voltaje de la siguiente manera, tenemos:

$$v_1 = V_{\max} \sin(\omega t) \quad (10.34)$$

Reemplazando la ecuación 10.34 dentro de la 10.26, despejando y resolviendo la integral para el valor del enlace de flujo mutuo nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_m}{dt} &\approx V_{\max} \sin(\omega t) \\ \lambda_m &\approx \int V_{\max} \sin(\omega t) dt \\ \lambda_m(t) &\approx -\frac{V_{\max}}{\omega} \cos(\omega t) + c \end{aligned} \quad (10.35)$$

La constante c representa el valor del flujo residual existente dentro del núcleo en $t=0$ producido por la ecuación 10.34. Para encontrar la constante c se parte de la siguiente manera. Si en $t=0$ se tiene un flujo remanente λ_R entonces la ecuación 10.35 es igual a:

$$\begin{aligned} \lambda_R = \lambda_m(0) &\approx -\frac{V_{\max}}{\omega} \cos(0) \\ \lambda_R = \lambda_m(0) &\approx -\frac{V_{\max}}{\omega} \\ c = \lambda_R &= -\frac{V_{\max}}{\omega} \end{aligned} \quad (10.36)$$

Reemplazando la ecuación 10.36 dentro de la 10.35, se obtiene la ecuación de enlace de flujo (ecuación 10.37) que se tiene dentro del núcleo. Es claro que en $t=0$ existe un flujo remanente λ_R que aumenta el valor de la corriente primaria.

$$\lambda_m(t) \approx -\frac{V_m}{\omega} \cos(\omega t) - \frac{V_m}{\omega} \quad (10.37)$$

Reescribiendo la ecuación 4.35 de la siguiente manera:

$$\lambda_m(t) \approx -\frac{V_{\max}}{\omega} \cos(\omega t + 120) + c \quad (10.38)$$

Y analizando la constante c del mismo modo antes realizado, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \lambda_R = \lambda_m(0) &\approx -\frac{V_{\max}}{\omega} \cos(0 + 120) \\ \lambda_R = \lambda_m(0) &\approx \frac{V_{\max}}{2\omega} \\ c = \lambda_R &= \frac{V_{\max}}{2\omega} \end{aligned}$$

$$\lambda_m(t) \approx -\frac{V_{\max}}{w} \cos(\omega t + 120) + \frac{V_{\max}}{2w} \quad (10.39)$$

En este caso se observa que también existe flujo remanente, pero es diferente al mostrado a la ecuación 10.38, es decir que a medida que se varié el ángulo de voltaje de la fuente primaria del transformador variara también el flujo remanente y por ende la corriente primaria también se verá afectada.

Si en $t = 0$ el voltaje tiene un desfase de 240 grados, el enlace de flujo mutuo será:

$$\lambda_m(t) \approx -\frac{V_{\max}}{w} \cos(\omega t + 240) + \frac{V_{\max}}{2w} \quad (10.40)$$

Si a nuestro sistema de la figura 10.14 inyectamos voltaje a diferentes valores de desfaseamiento (0, 120 y 240) se obtienen las siguientes corrientes (figura 10.25).

En un transformador real la corriente inrush es alrededor de 10-20 veces la corriente nominal del transformador, ya que en la misma se tienen varios aspectos los cuales tienen que ver con el tipo de material del núcleo y del instante de swiching de los interruptores. El modelo presentado solamente muestra una de las causas de la corriente inrush la cual es el flujo remanente que se puede obtener a partir de la variación del ángulo del voltaje de la fuente primaria.

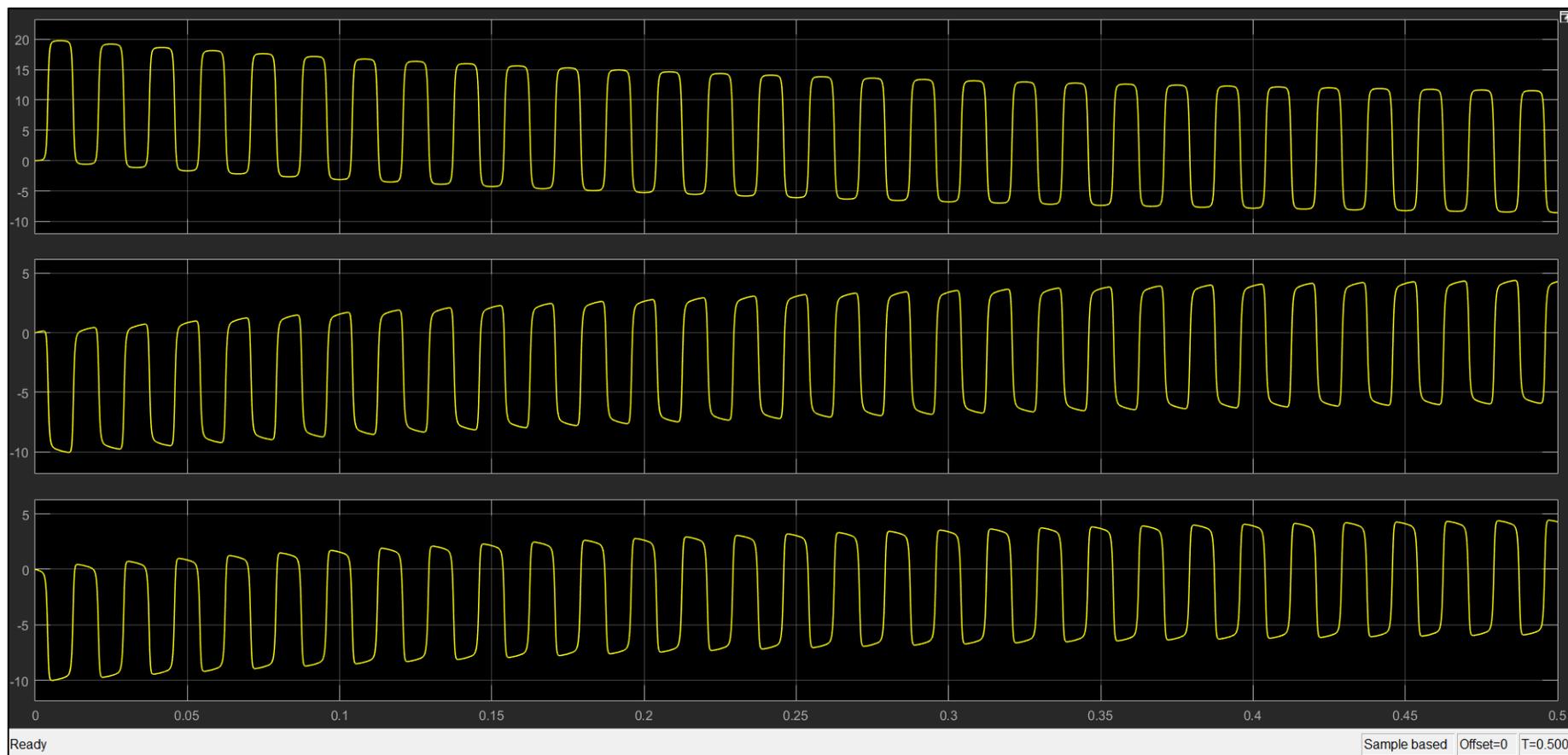
En algunos casos existe ya un pequeño flujo remanente dentro del transformador esto se da cuando se des-energiza el transformador, este flujo el cual se suma al flujo remanente existente en el instante de energización, ocasiona que la corriente primaria se incremente aún más, haciendo que en algunas ocasiones dicha corriente de excitación llegue a tener niveles tan altos como los que se encuentra en una corriente de cortocircuito.

Para incorporar el flujo pre existente en el esquema propuesto se partirá de la ecuación 10.37, reescribiéndola de la siguiente manera se obtiene la ecuación de enlace de flujo para la corriente inrush:

$$\lambda_{mIN}(t) \approx -\lambda_{\max} \cos(\omega t) - \lambda_R + \lambda_{R_0} \quad (10.41)$$

En donde λ_{\max} representa el valor máximo del enlace de flujo (valor instantáneo), y λ_{R_0} representa el valor del flujo ya existente en el núcleo antes de la energización que se suma al flujo remanente del instante de energización λ_R .

Figura 10.25 Corrientes de excitación saturadas de un transformador alimentado con voltajes a diferentes ángulos.



Reescribiendo la ecuación 10.41 de la siguiente manera:

$$\frac{d\lambda_{mN}}{dt} \approx \frac{d(-\lambda \cos(\omega t) - \lambda_R)}{dt} + \frac{d\lambda_{R_0}}{dt} \quad (10.42a)$$

$$v_{1mN} \approx v_1 + v_{1R_0} \quad (10.42b)$$

En donde λ_{mN} representa el enlace de flujo mutuo que genera la corriente inrush. La ecuación 10.41 muestra el flujo total que se encuentra en el núcleo al momento de la energización del transformador y la ecuación 10.42 muestra el voltaje total que se necesita para simular el voltaje primario necesario para generar el flujo total dentro del núcleo.

Se debe tener en cuenta que v_{1R_0} tiene característica exponencial ya que ese flujo pre-existente en el núcleo tiene un amortiguamiento por parte de la resistencia y la reactancia mutua, por lo que después de unos pocos segundos desaparece. Para encontrar dicho voltaje v_{1R_0} se parte de la siguiente manera.

Partiendo de la ecuación 8.46a en donde se ha eliminado la reactancia x_1 y en donde se reemplazó los valores del voltaje primario por los de la ecuación 10.34 y teniendo en cuenta que se va a analizar la corriente inrush cuando $i'_2 = 0$ tenemos:

$$V_{\max} \sin(\omega t) = i_1 r_1 + L_{l1} \frac{di_1}{dt} + L_m \frac{di_1}{dt} \quad (10.43)$$

Utilizando la siguiente igualdad $i = \frac{\lambda}{L}$ la ecuación 10.43 se transforma en:

$$V_{\max} \sin(\omega t) = \frac{r_1}{L_m} \lambda_m + \frac{L_{l1}}{L_m} \frac{d\lambda_m}{dt} + \frac{d\lambda_m}{dt} \quad (10.44)$$

Resolviendo la ecuación 10.44 para λ_m nos queda:

$$\lambda_m(t) = \frac{-V_m \omega L_m^2 \xi}{r_1^2 + (\omega L_m \xi)^2} \cos(\omega t) + \frac{r V_m \omega L_m}{r_1^2 + (\omega L_m \xi)^2} \sin(\omega t) + \left[\frac{V_m \omega L_m^2 \xi}{r_1^2 + (\omega L_m \xi)^2} + \lambda_R \right] e^{-\frac{r t}{L_{l1} + L_m}} \quad (10.45)$$

En donde:

$$\xi = \left(\frac{L_{l1}}{L_m} + 1 \right)$$

Comparando la ecuación 10.45 con la 10.37 vemos que resultan ser iguales. La ecuación 10.45 es la ecuación del flujo dentro del núcleo, dentro de la misma se aprecia que se encuentra el flujo remanente en el instante de energización λ_R .

Si a la ecuación 10.45 le agregamos el flujo remanente pre-existente en el núcleo λ_{R_0} se aprecia que la ecuación 10.45 se transforma en la ecuación 10.41.

$$\lambda_{m_{IN}}(t) = \frac{-V_m \omega L_m^2 \xi}{r_1^2 + (\omega L_m \xi)^2} \cos(\omega t) + \frac{r V_m \omega L_m}{r_1^2 + (\omega L_m \xi)^2} \sin(\omega t) + \left[\frac{V_m \omega L_m^2 \xi}{r_1^2 + (\omega L_m \xi)^2} + \lambda_R + \lambda_{R_0} \right] e^{-\frac{r t}{L_1 + L_m}} \quad (10.46)$$

Teniendo en cuenta que la ecuación 10.41 puede reescribirse de la siguiente manera

$$\lambda_{m_{IN}}(t) \approx \lambda_m(t) + \lambda_{R_0}(t) \quad (10.47)$$

Y sabiendo que $\lambda_{R_0}(t)$ genera una pequeña fuente de voltaje que se suma al voltaje v_1 pero que sin embargo con el tiempo desaparece, y teniendo en cuenta la ecuación 10.46, el voltaje v_{1R_0} es igual a:

$$v_{1R_0} = V_{1R_0 \max} \sin(\omega t) e^{-\frac{r t}{L_1 + L_m}} \quad (10.48)$$

Por lo que la ecuación 10.42b es igual a:

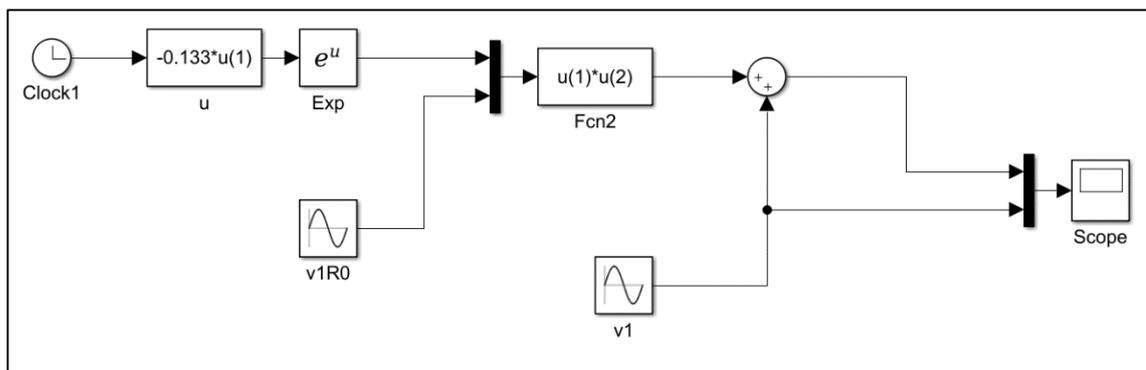
$$v_{1m_{IN}} \approx V_{\max} \sin(\omega t) + V_{1R_0 \max} \sin(\omega t) e^{-\frac{r t}{L_1 + L_m}} \quad (10.49)$$

El valor de $V_{1R_0 \max}$ puede encontrarse de la siguiente igualdad $V_{1R_0 \max} = \omega \lambda_{R_0}$.

Se aprecia en la ecuación 10.49 que el voltaje necesario para simular la corriente inrush necesita de una fuente adicional que cae exponencialmente, incrementado la corriente primaria del transformador.

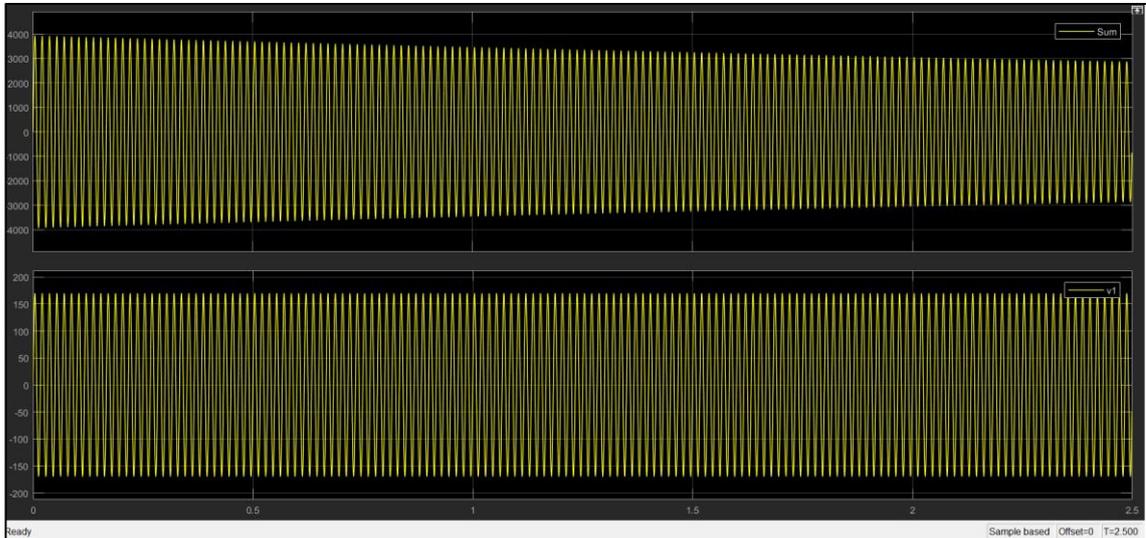
Llevando la ecuación 10.49 a nuestro modelo en Simulink, se obtiene el siguiente diagrama de bloques que se aprecia en la figura 10.26.

Figura 10.26 Diagrama de bloques para la corriente inrush.



En la figura 10.27 se muestra las gráficas respectivas tanto del voltaje v_1 como del voltaje $v_{1m_{IN}}$ para un valor de flujo pre-existente de $\Phi = 0.5$ webers [4].

Figura 10.27 Voltaje primario con corriente Inrush y voltaje primario sin corriente Inrush.

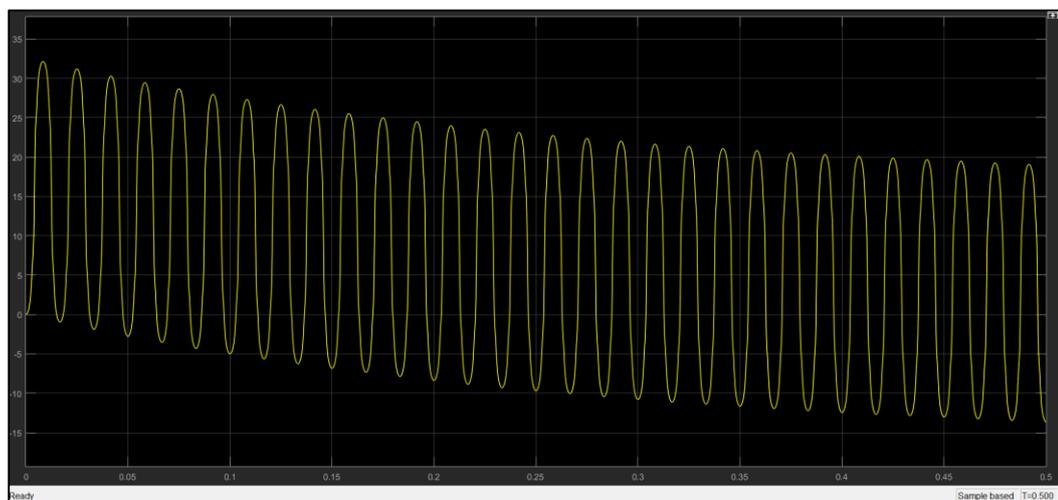


Se puede apreciar claramente en la figura 10.27 que el voltaje pico de $v_{1m_{IN}}$ es mucho más alto que el voltaje v_1 y también que el voltaje $v_{1m_{IN}}$ con el tiempo decae hasta ser igual a v_1 . Esto debido al flujo remanente pre-existente en el núcleo antes de la energización.

10.4.1 Corriente inrush caso no saturado

En la figura 10.28 se muestra la corriente inrush i_1 . Si se compara con la corriente i_1 de la figura 10.22 con el de la figura 10.28, se aprecia que existe un incremento considerable de la misma.

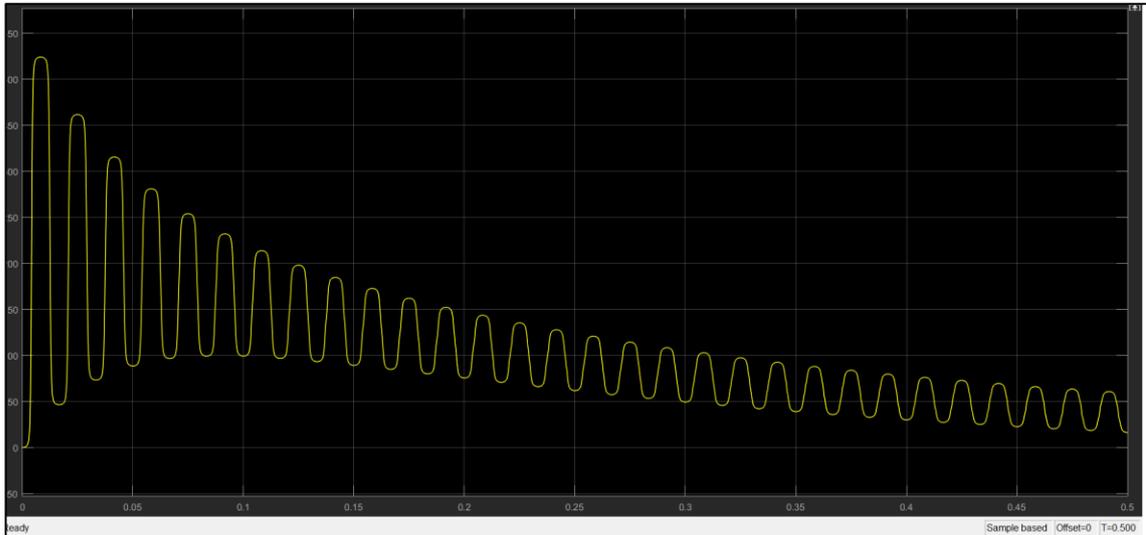
Figura 10.28 Corriente Inrush primaria.



10.4.2 Corriente inrush caso saturado

Cuando en el instante de la energización el transformador se encuentra saturado se obtiene una corriente como el mostrado en la figura 10.29.

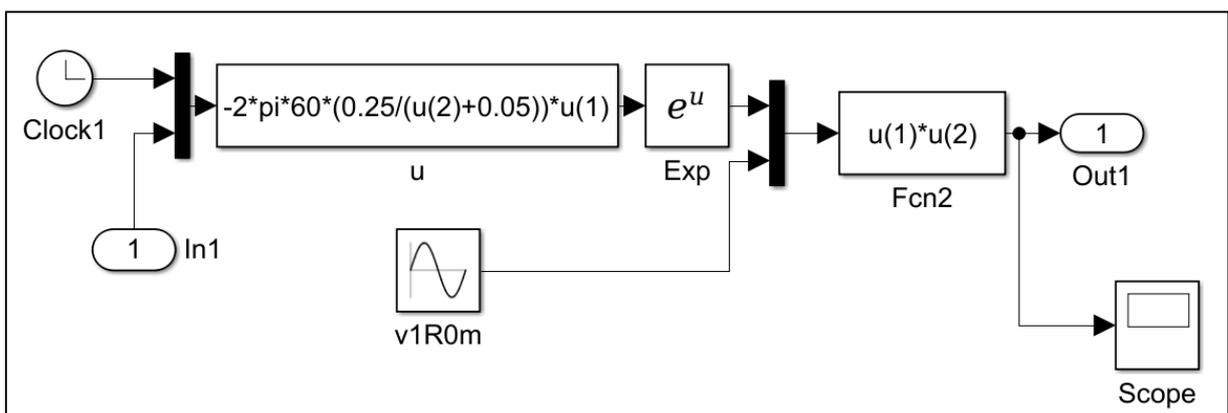
Figura 10.29 Corriente primaria inrush con nucleo saturado.



Comparando la corriente de la gráfica 10.29 con la de la figura 10.23 se observa que existe un aumento de corriente que concuerda con lo mencionado anteriormente.

Para la incorporación de la saturación en la corriente inrush se parte de la ecuación 10.49, en donde como se aprecia el segundo término del lado derecho contiene el valor de la inductancia mutua L_m , y como se mencionó en el apartado de la incorporación de la saturación, la L_m varía a medida que la pendiente de la permeabilidad se reduce, por lo que solo se debe agregar la inductancia de saturación a la gráfica de la figura 10.26, lo que resulta en el diagrama de bloques de la figura 10.30.

Figura 10.30 Diagrama de bloques para la corriente inrush con núcleo saturado.



La entrada **In1** representa la reactancia mutua de la saturación del transformador, mientras que la salida **Out1** representa el voltaje adicional de la corriente inrush v_{1R_0} . Se debe tener en cuenta que el tiempo de amortiguamiento en el que la ecuación 10.49 es igual a la ecuación 10.34 dependerá de los valores de la resistencia, inductancia mutua e inductancia de pérdidas del devanado primario y que se puede apreciar en la segunda función del lado derecho de la ecuación 10.49. Estos datos pueden ser ingresados en el diagrama de la figura 10.30.

10.5 VALIDACIÓN DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Para la validación y comprobación de la hipótesis planteada se utilizara un bloque en **SIMULINK** de un transformador trifásico conectado en *Y-Y* propio de **MATLAB** y el esquema planteado en este informe con las mismas características, tal y como se muestra en la figura 10.33. En **MATLAB** se desarrolló el esquema con un transformador trifásico como se muestra en la figura 10.52, para la comprobación se utilizara los datos de la carga Inductiva-Resistiva cuyos datos se muestran en la tabla 10.2. Los resultados respectivos se muestran en las tablas 10.5 para el transformador propuesto en este informe y 10.6 para el transformador existente y modelado en **MATLAB** respectivamente.

Tabla 10.5 Datos de un transformador trifásico con carga Inductiva-Resistiva.

Datos del transformador de la figura 10.33		
Devanado	Voltajes de fase (V)	Corrientes de fase (A)
Primario/Fase a	120	3.819
Fase b	120	3.819
Fase c	120	3.819
Secundario/Fase a	238.6	1.91
Fase b	238.6	1.909
Fase c	238.6	1.909

Tabla 10.6 Datos de un transformador trifásico con carga Inductiva-Resistiva.

Datos del transformador de la figura 10.52		
Devanado	Voltajes de fase (V)	Corrientes de fase (A)
Primario/Fase a	120	3.944
Fase b	120	3.937
Fase c	119.9	3.937
Secundario/Fase a	237.6	1.905
Fase b	237.7	1.902
Fase c	237.5	1.902

Figura 10.31 Esquema de un transformador trifásico en MATLAB/SIMULINK.

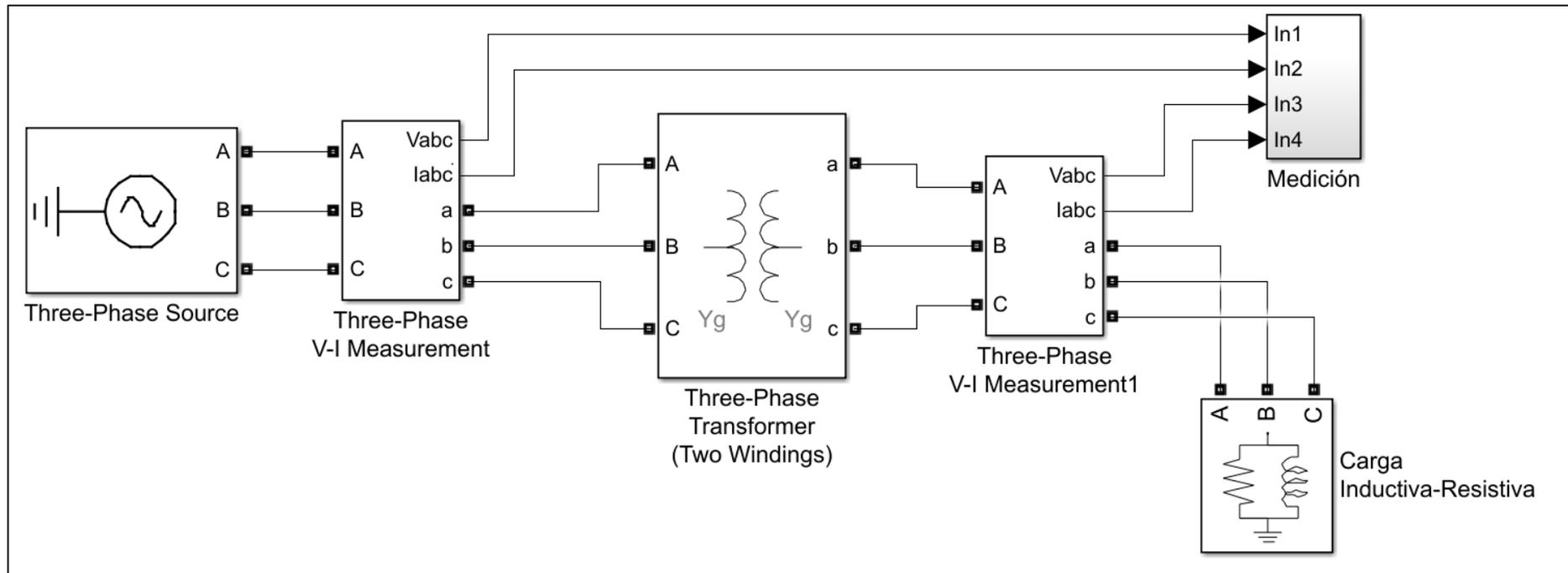


Tabla 10.7 Comparación de los datos de las tablas 10.5 y 10.6.

Porcentaje de error de la comparación de los dos esquemas		
Devanado	Error de voltaje (%)	Error de corriente (%)
Primario/Fase a	0	1.5625×10^{-4}
Fase b	0	1.3924×10^{-4}
Fase c	1×10^{-4}	1.3924×10^{-4}
Secundario/Fase a	0.01	2.5×10^{-7}
Fase b	8.1×10^{-3}	4.9×10^{-7}
Fase c	0.0121	4.9×10^{-7}

La comparación de las tablas 10.5 y 10.6 se muestran en la tabla 10.7, en donde como se muestra el error es mínimo, con lo que se valida nuestra hipótesis ya que los datos obtenidos en nuestro esquema son semejantes a los de un transformador real, ya que el transformador que se encuentra dentro de MATLAB arroja resultados similares.

11. IMPACTOS (TÉCNICOS, SOCIALES, AMBIENTALES O ECONOMICOS)

Dentro de los impactos técnicos se tiene una retribución de los datos que se pueden obtener al momento de correr una simulación, tal es el caso como el conocimiento del comportamiento del transformador ante ciertos tipos de carga, o también las características que se pueden presentar al momento de conectar dos transformadores en paralelo. Básicamente el impacto técnico es la predicción o el conocimiento del comportamiento del transformador ante ciertos eventos planeados y no planeados. Se tiene además los impactos que obtendrán los estudiantes, al realizar prácticas o simulaciones y plantear nuevas ideas o simulaciones para conocer más a profundidad el comportamiento del transformador.

Los impactos económicos se muestran en la no realización de proyectos que no tengan sustento de simulación, ya que si se conoce como se comportara el transformador ante tales díselos, se puede discrepar en que el proyecto pueda o no pueda funcionar, ahorrando así el dinero en proyectos cuyo resultado no sea favorecido al correr una simulación.

12. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Las ecuaciones de estado del transformador obtenidas arrojan resultados similares a los de un transformador real.
- Se puede simular la saturación del transformador colocando la variación de la reactancia mutua del núcleo del transformador.

- La corriente primaria cuando el transformador se encuentra saturado no es completamente sinusoidal.
- La forma de onda de la corriente primaria cuando el transformador se encuentra saturado, no afecta en nada a la forma de onda de corriente y voltaje senoidal pura secundaria.
- El flujo residual pre-existente en el núcleo antes de la energización hace que la corriente primaria se incremente aún más en vacío.
- Cuando el transformador trabaja en carga el fenómeno inrush desaparece en cierto grado.
- Se puede limitar el tiempo de duración de la corriente inrush variando la resistencia interna del devanado primario.
- La simulación de un transformador propio del Software Matlab arroja los mismos resultados que el transformador con las mismas características de nuestro informe.
- Es recomendable que los estudiantes que inicien en el ámbito de las máquinas eléctricas revisen la bibliografía al final de este documento.
- Es recomendable tener conocimientos básicos en matemáticas avanzadas, Matlab, circuitos eléctricos y sistemas de control para conocer de mejor manera el funcionamiento y modelamiento de la máquina eléctrica.
- Se recomienda para la simulación correcta del transformador colocar valores cercanos o aproximados de un transformador real.
- Para la simulación de la saturación del transformador es recomendable colocar el valor de la reactancia mutua en la rodilla de la curva de saturación.
- Si se desea simular la corriente inrush en el transformador, se puede empezar con el flujo residual existente en el momento de la energización, más no el flujo residual pre-existente antes de la energización.

13. BIBLIOGRAFÍA

- [1] T. Wildi, Máquinas Eléctricas y Sistemas de Potencia, 2007: Pearson Educación, México.
- [2] P. Krause, O. Wasynczuk y S. Sudhoff, Analysis of Electric Machinery and Drive Systems, New York: IEEE Press Series on Power Engineering, 2002.
- [3] K. Charles, Solid State Physics, New York: John Willey & Sons, Inc., 1976.
- [4] F. Mora, Máquinas eléctricas, Aravaca: Mc Graw Hill, 2003.
- [5] G. Smarajit, Electrical Machines, Baba Barkha: Pearson Education , 2007.
- [6] S. Chapman, Máquinas Eléctricas, México: Mc Graw Hill, 2012.
- [7] O. Ozgonenel y A. Caner, «RG,» 12 Diciembre 2013. [En línea]. Available: https://www.researchgate.net/publication/242776169_A_STUDY_ON_MAGNETIZING_INRUSH_CURRENT_OF_DIFFERENT_CORE_MATERIALS. [Último acceso: 22 Abril 2019].
- [8] R. Feinberg, Modern Power Transformer Practice, Londres : The Macmillan Press LTD, 1979.
- [9] C. Mencuccini y V. Silvestrini, FISIC 2 Elettromagnetismo Ottica, Napoli: Liguori Editore, 1988.
- [10] J. Edimister, Electromagnetismo, Mc Graw Hill.
- [11] D. Cheng, Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería, México: Pearson Education, 1998.
- [12] M. El-Hawary, Principles of Electric Machines With Power Electronic Applications, New York: IEEE Press Series on Power Engineering, 2002.
- [13] M. Nigro y C. Voci, Problemi di Fisica Generale, Italy: Edizioni Libreria Cortina Padova 1997, 1997.

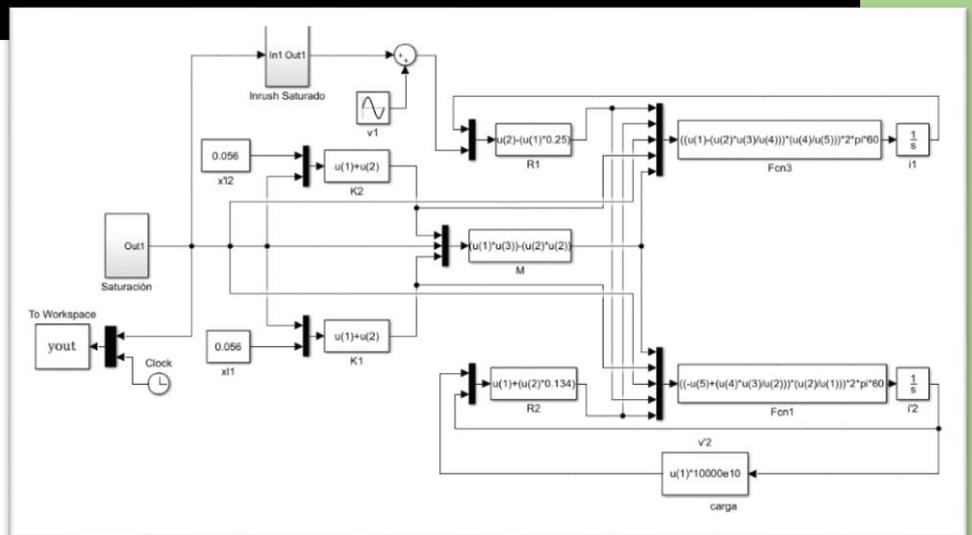
- [14] M. Masoum, E. Fuchs y D. Roesler, «Impact of nonlinear loads on anisotropic transformers,» *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 6, n° 4, pp. 1781-1788, 1991.
- [15] C. Mun, *Dynamic Simulation of Electric Machinery*, New Jersey: Prentice Hall PTR, 1998.
- [16] L. Garcia y T. Wiliam, *Electromagnetismo*, Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2014.
- [17] N. Nise, *Sistemas de control para Ingeniería*, México: Compañía Editorial Continental, 2006.
- [18] R. Hernández, *Introducción a los sistemas de control: Conceptos, aplicación y simulación en MATLAB*, México: Pearson, 2010.
- [19] J. Sizemore y J. Mueller, *MATLAB FOR DUMMIES*, New Jersey: A Wiley Brand, 2015.
- [20] H. Moore, *MATLAB para ingenieros*, México: PEARSON Prentice Hall, 2007.
- [21] C. S. M. Alexander, *Fundamentos de circuitos eléctricos*, México: Mc Graw Hill, 2006.
- [22] G. Biorci, *FONDAMENTI DI TEORIA DEI CIRCUITI*, New York: McGraw-Hill, 1995.
- [23] E. Acha, V. Agelidis, O. Anaya-Lara y T. Miller, *Power Electronic Control in Electrical Systems*, Boston: Newnws Power Engineering Series, 2002.
- [24] G. P. B. Stumberger, B. Stumberger, T. Matej y D. Dolinar, «Evaluation of Experimental Methods for Determinig the Magnetically Nonlinear Characteristics of Electromagnetic Devices,» *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS*, vol. 41, n° 10, pp. 4030-4032, 2005.
- [25] C. McLyman, *Transformer and Inductor desing Handbook*, Idyllwild: Marcel Dekker, 2004.
- [26] W. Macfadyen, R. Simpson, R. Staler y W. Wood, «Representation of Magnetization Curves by Exponential Series,» *PROC. IEEE*, vol. 121, n° 8, pp. 992-994, 1973.

- [27] S. Prusty y M. Rao, «A Direct Piecewise Linearized Approach to Convert rms Saturation Characteristic to Instantaneous,» *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETIC*, vol. 16, n° 1, pp. 156-160, 1980.
- [28] W. Macfadyen, R. Simpson, R. Slader y W. Wood, «Repraentation of Magnetisation Curves by Exponential Series,» *PROC. IEEE*, vol. 121, n° 7, pp. 707-708, 1974.
- [29] O. Youssef, «A Wavelt-Based Techique for Discrimination Between Faults and Magnetizing Inrush Current in Transformers,» *IEEE TRANSACTIONS ON POWER DELIVERY*, vol. 18, n° 176, pp. 170-, 2003.
- [30] Y. Song, H. Jia, X. Xu y L. Yu, «ResearchGate,» 29 Abril 2017. [En línea]. Available: https://www.researchgate.net/publication/318692720_Simulation_analysis_of_inrush_current_of_three_phase_transformer_based_on_MATLAB/references. [Último acceso: 29 Mayo 2019].

ANEXOS

2019

Manual/Guía de Laboratorio



Erik Paneluisa

8-4-2019

ÍNDICE GENERAL

I. MANUAL	1
1.1. Introducción.....	1
1.2. Introducción al modelamiento en Matlab/Simulink	2
1.3. Incorporación de la carga	6
1.4. Incorporación de la saturación del núcleo	8
1.5. Incorporación de la corriente Inrush al transformador	10
1.5.1. Corriente inrush sin saturación.....	11
1.5.2. Corriente inrush con saturación.....	12
1.6. Conexión trifásica a partir de bancos monofásicos	14
1.6.1. Conexión trifásica Y- Y	14
1.6.1.1. Funcionamiento en vacío sin saturación.....	16
1.6.1.2. Funcionamiento en carga sin saturación.....	18
1.6.1.3. Funcionamiento en carga con saturación.....	19
1.6.2. Conexión trifásica Δ - Δ	21
1.7. Conexión como autotransformador	25
1.7.1. Conexión como autotransformador reductor.....	25
1.7.2. Conexión como autotransformador elevador	29
II. GUIA PRÁCTICA	30
2.1. Caída de voltaje en un transformador real sin saturación.....	30
2.2. Corriente inrush en un transformador real sin saturación.....	34
2.3. Transformador real con carga inductiva resistiva saturado	38
III. BIBLIOGRAFÍA	42
IV. RESUMEN EJECUTIVO	44

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura I.1 Circuito eléctrico equivalente de un transformador sin pérdidas por corrientes de Foucault.	2
Figura I.2 Obtención del bloque Fcn en Simulink.	3
Figura I.3 Esquematización de la ecuación I.2.	4
Figura I.4 Medición de las variables del transformador (Sub-sistema de medición).	5
Figura I.5 Sub-sistema de Medición.	5
Figura I.6 Incorporación del Sub-sistema de medición al diagrama del transformador de la figura I.3.	6
Figura I.7 Sub-sistema del esquema de la figura 5 del transformador.	6
Figura I.8 Elementos para la simulación de un transformador.	7
Figura I.9 Incorporación de la carga al diagrama de la figura I.7.	8
Figura I.10 Transformador sin saturación.	9
Figura I.11 Transformador con saturación.	9
Figura I.12 Elementos que conforman el sub-sistema saturación.	9
Figura I.13 Parámetros a introducir en el diagrama de la figura I.12.	10
Figura I.14 Elementos que conforman el sub-sistema de la corriente inrush sin saturación. .	11
Figura I.15 Transformador con corriente inrush no saturado en vacío.	12
Figura I.16 Transformador con corriente inrush saturado en vacío.	13
Figura I.17 Elementos que conforman el sub-sistema de la corriente inrush con saturación. .	13
Figura I.18 Subsistema de un transformador monofásico.	14
Figura I.19 Banco trifásico de transformadores monofásicos conectados en Y.	15
Figura I.20 Conexión trifásica Y-Y mediante bancos monofásicos.	17
Figura I.21 Voltajes de un banco trifásico Y-Y funcionando en vacío sin saturación.	18
Figura I.22 Corrientes de un banco trifásico Y-Y funcionando en vacío sin saturación.	18
Figura I.23 Voltajes de un banco trifásico Y-Y funcionando con carga sin saturación.	19
Figura I.24 Corrientes de un banco trifásico Y-Y funcionando con carga sin saturación.	19
Figura I.25 Voltajes de un banco trifásico Y-Y funcionando con carga saturado.	20
Figura I.26 Voltaje a tierra	20
Figura I.27 Corrientes de un banco trifásico Y-Y funcionando con carga saturado.	21
Figura I.28 Banco trifásico de transformadores monofásicos conectados en delta.	22
Figura I.29 Conexión trifásica Δ - Δ mediante bancos monofásicos.	23

Figura I.30 Voltajes de fase y línea primarios de un banco trifásico Δ - Δ con carga no saturado.	24
Figura I.31 Voltajes de fase y línea secundarios de un banco trifásico Δ - Δ con carga no saturado.....	24
Figura I.32 Corrientes de línea primaria y secundaria de un banco trifásico Δ - Δ con carga no saturado.....	25
Figura I.33 Conexión de un autotransformador reductor.....	26
Figura I.34 Conexión de un autotransformador elevador.....	27
Figura I.35 Conexión como autotransformador reductor en SIMULINK.....	28
Figura I.36 Voltajes de entrada y salida de los devanados del autotransformador reductor...28	
Figura I.37 Corrientes de entrada y salida de los devanados del autotransformador reductor.	29
Figura I.38 Conexión como autotransformador elevador en SIMULINK.....	29
Figura II.1 Saturación en el núcleo.....	38
Figura II.2 Datos para la saturación del transformador.....	39

I. MANUAL

1.1.Introducción

El siguiente documento presenta los pasos básicos para la incorporación de ecuaciones de estado a Simulink/Matlab, basado en el informe previo cuyo tema es “Desarrollo de un algoritmo mediante el software Matlab para el estudio del comportamiento de los transformadores.”, también se muestran algunos ejemplos con fines educativos, para el desarrollo en lo referente al conocimiento de las maquinas electricas.

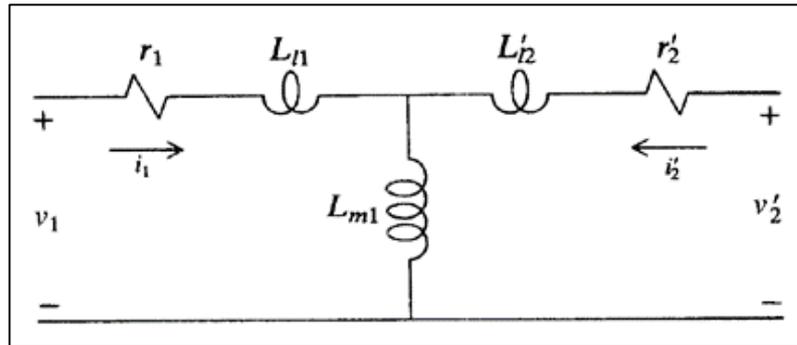
Este documento está dirigido tanto a estudiantes como docentes que estén familiarizados en el ambiente de MATLAB y también a aquellos que tengan cierto conocimiento en transformadores eléctricos, además de que se debe disponer de conocimientos básicos en matemáticas avanzadas y sistemas de control.

Todos los datos introducidos en el diagrama propuesto pueden ser alterados con fines educativos, y en algunas ocasiones se necesitara obtener información de otras fuentes para obtener resultados semejantes a los de una maquina eléctrica real.

1.2.Introducción al modelamiento en Matlab/Simulink

El modelamiento de sistemas físicos para su estudio en Matlab/Simulink se los puede representar de diferentes maneras, en este caso el modelo matemático desarrollado para el transformador, se lo realizo utilizando la función de transferencia.

Figura I.1 Circuito eléctrico equivalente de un transformador sin pérdidas por Foucault.



En el documento “Desarrollo de un algoritmo mediante el software Matlab para el estudio del comportamiento de los transformadores.” se tienen las siguientes ecuaciones de estado del transformador que se obtiene de la figura I.1:

$$i_1 = \int \left(\left(v_1 - i_1 R_1 + (-v_2 - i'_2 R'_2) \frac{x_{m1}}{x'_{l2} + x_{m1}} \right) \frac{w(x'_{l2} + x_{m1})}{((x'_{l2} + x_{m1})(x_{l1} + x_{m1})) - x_{m1}^2} \right) dt \quad (\text{I.1a})$$

$$i'_2 = \int \left(\left(-v_2 - i'_2 R'_2 + (v_1 - i_1 R_1) \frac{x_{m1}}{x_{l1} + x_{m1}} \right) \frac{w(x_{l1} + x_{m1})}{((x'_{l2} + x_{m1})(x_{l1} + x_{m1})) - x_{m1}^2} \right) dt \quad (\text{I.1b})$$

La incorporación de esta ecuación en **SIMULINK** se lo realiza abriendo la ventana de Simulink en Matlab, a continuación se da clic en la opción **Simscape**, y finalmente se elige la opción de la ventana de trabajo **Simscape Power Systems ST**. Es muy importante abrir una hoja de trabajo de este tipo ya que el bloque **Powergui** es el que nos ayuda a obtener una buena simulación.

Para la incorporación de la ecuación I.1 se utiliza los bloques **Fcn**, estos bloques nos permiten ingresar cualquier número de entradas y obtener una salida. Para encontrar este bloque simplemente se debe abrir la ventana **Simulink Library Browser** (Librería de Simulink), a continuación se busca la opción **Simulink/User-Defined Functions**. Lo anterior se resume en la figura I.2.

Para poder simplificar un poco la ecuación I.1, se lo reescribe de la siguiente manera:

$$i_1 = \int \left(\left(v_1 - i_1 R_1 - (v_2 + i_2 R_2) \frac{x_{m1}}{K_2} \right) \frac{K_2}{M} \right) dt \quad (\text{I.2a})$$

$$i_2 = \int \left(\left(-v_2 - i_2 R_2 + (v_1 - i_1 R_1) \frac{x_{m1}}{K_1} \right) \frac{K_1}{M} \right) dt \quad (\text{I.2b})$$

En donde:

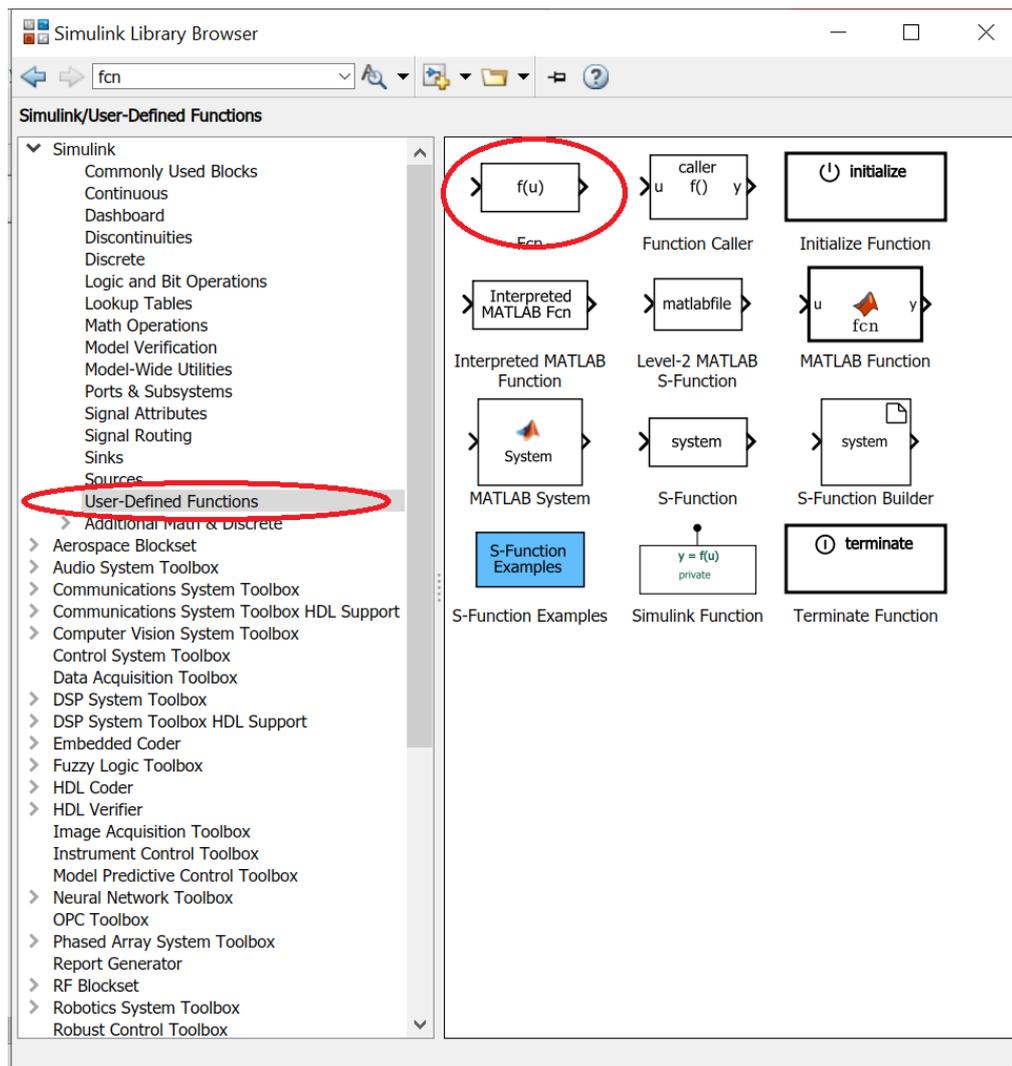
$$K_2 = w(x'_{l2} + x_{m1})$$

$$K_1 = w(x_{l1} + x_{m1})$$

$$M = ((x'_{l2} + x_{m1})(x_{l1} + x_{m1})) - x_{m1}^2 = ((K_1 K_2) - x_{m1}^2)$$

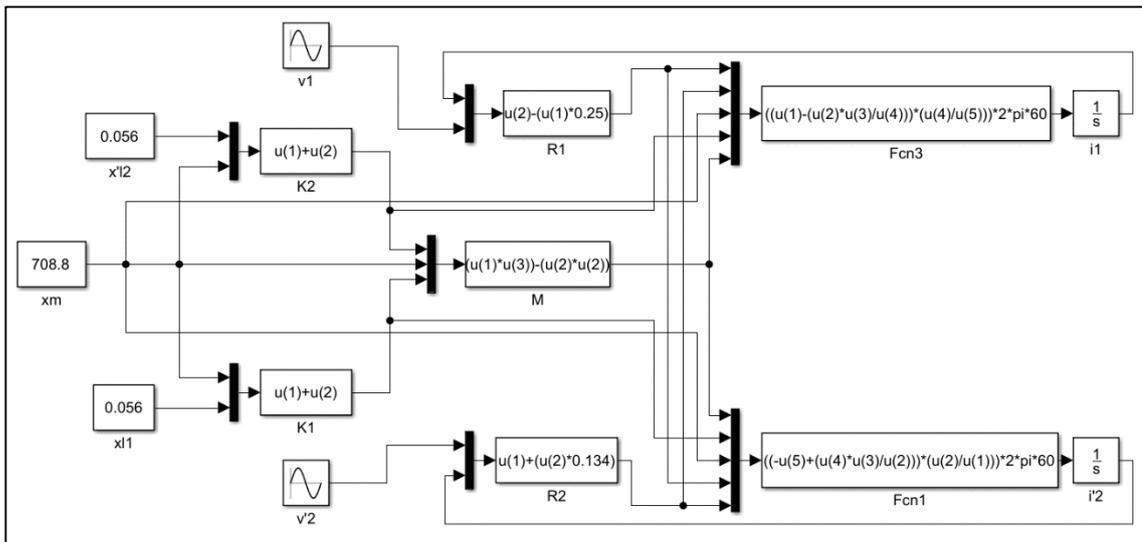
Se aprecia que la ecuación I.2 es una reducción de la ecuación I.1.

Figura I.2 Obtención del bloque Fcn en Simulink.



Usando el bloque **Fcn** para incorporar la ecuación I.2, se obtiene el esquema de la figura I.3. Se observa que en la figura I.3 se tienen un conjunto de bloques **Fcn**, cada bloque representa una parte de la ecuación I.2, por ejemplo véase los bloques **K2**, **K1** y **M** en donde son una parte de la ecuación I.2. Sin embargo los bloques **x1'2**, **x11** y **xm** representan valores constantes, estos datos fueron introducidos en un bloque llamado **Constant**, cuya dirección para obtenerlo es **Simulink/Commonly Used Blocks/Constant**.

Figura I.3 Esquematación de la ecuación I.2.



Los bloques **R1** y **R'2**, representan la parte de la ecuación I.2 en donde se ingresa el valor de las resistencias primarias y secundarias respectivamente, además en dichos bloques también se aprecia que se ingresan el valor de los voltajes **v1** y **v'2**. Estos últimos son bloques que generan ondas senoidales puras las cuales sirven como la entrada de la fuente al transformador.

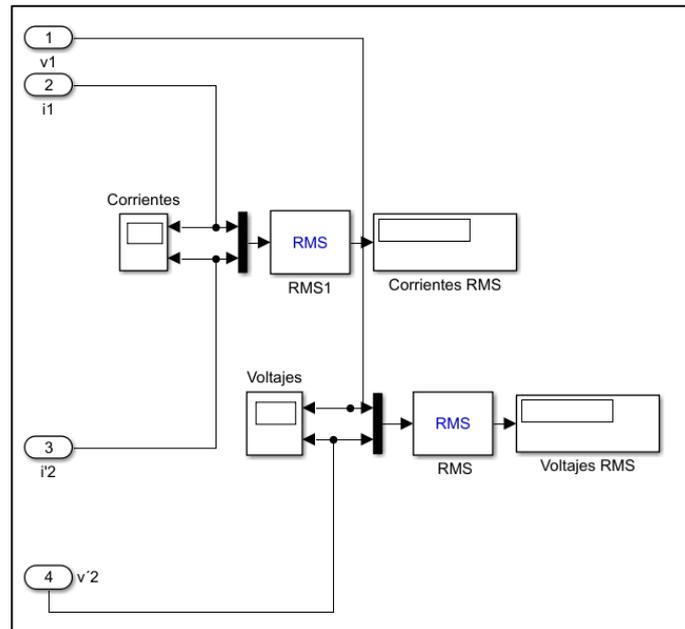
Para encontrar tal fuente simplemente ingrese en la siguiente dirección **Simulink/Math Operations/Sine Wave Function**. Los bloques **Fcn1** y **Fcn3** son las combinaciones de los bloques anteriores para que la ecuación I.2 se cumpla. Por último los bloques **i1** e **i'2** son las integrales que exige la ecuación I.2 para obtener la salida de las corrientes primaria y secundaria respectivamente. La obtención de estos últimos bloques es muy sencillo, solo se debe buscar en la siguiente dirección **Simulink/Commonly Used Blocks/Integrator**.

Para obtener los datos de las medidas de cada bloque, se utilizan las herramientas de medición que otorga Matlab, estos aparatos se los encuentra en esta dirección **Simulink/Sinks**. En algunos casos es oportuno conocer los valores rms tanto de voltajes como de corrientes, afortunadamente en Matlab/Simulink se tiene una herramienta que permite obtener lo anteriormente dicho, este bloque se conoce como el nombre de **RMS**, y se lo encuentra en

Simscape/Power System/Specialized Technology/Control & Measurements/Measurements/RMS. Todo lo referente a medición se lo puede encontrar en la figura I.4.

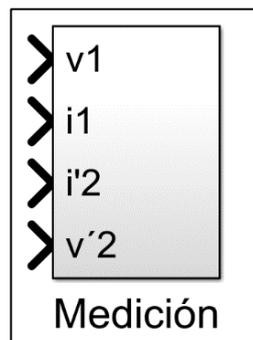
Se puede apreciar en las gráficas anteriores que se tiene un conector denominado **MUX**, este sirve como un nodo de variables, las cuales ingresan al bloque respectivo.

Figura I.4 Medición de las variables del transformador (Sub-sistema de medición).



La figura I.4 representa un sub-sistema del sistema de medición, esto se lo hace con el fin de ahorrar espacio y mejorar la visibilidad, el sub-sistema en general se aprecia en la figura I.5. La figura I.5 puede ser incorporada al diagrama de la figura I.3, tal y como se aprecia en la figura I.6.

Figura I.5 Sub-sistema de Medición.



1.3. Incorporación de la carga

La incorporación de la carga se lo realiza tomando en cuenta que tanto el transformador como la carga pueden ser representados como sub-sistemas diferentes. Para entender lo anteriormente dicho, si al diagrama de la figura I.3 lo convertimos en un sub-sistema con los voltajes y corrientes como entradas y salidas, se tiene el sub-sistema que se aprecia en la figura I.7.

Figura I.6 Incorporación del Sub-sistema de medición al diagrama del transformador de la figura I.3.

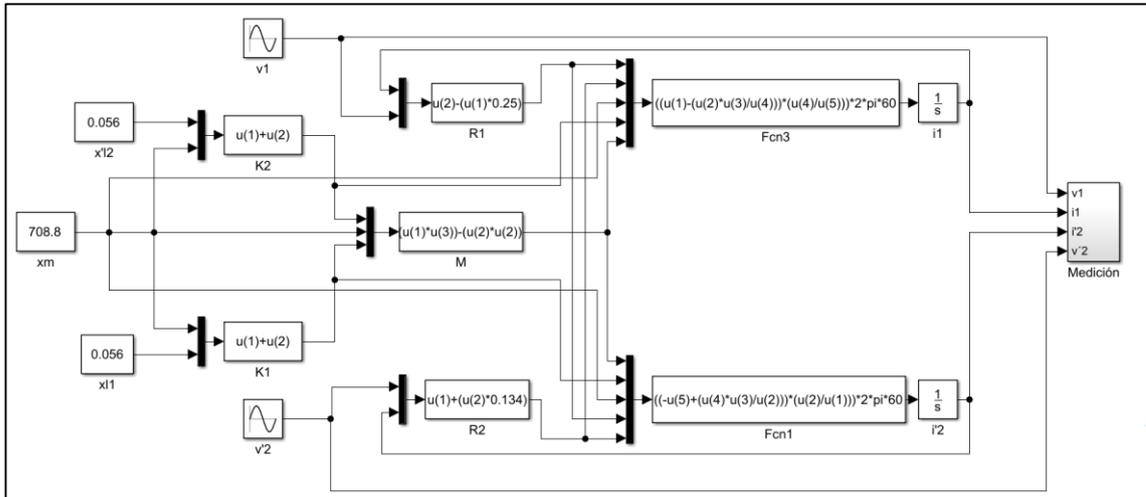
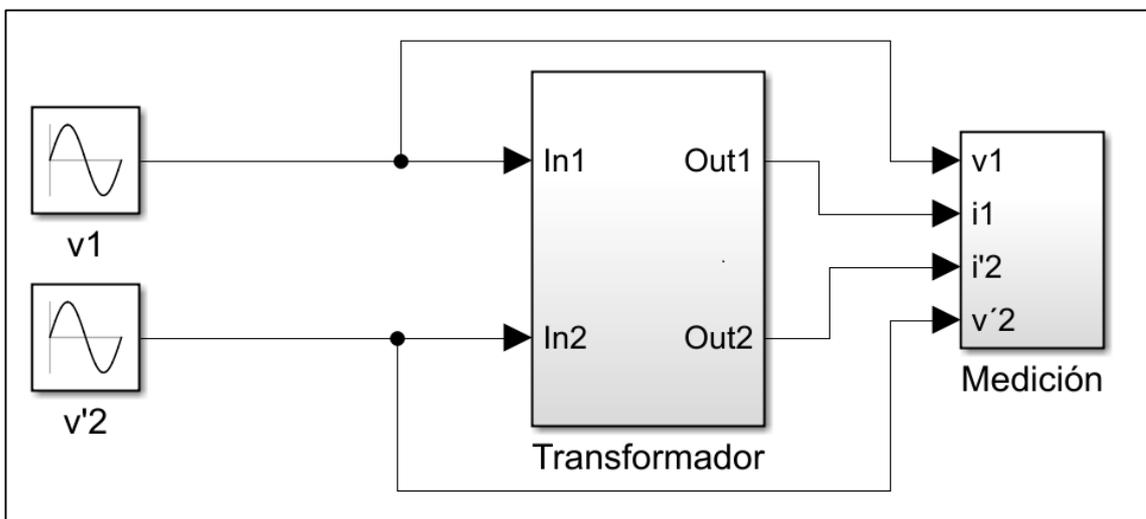


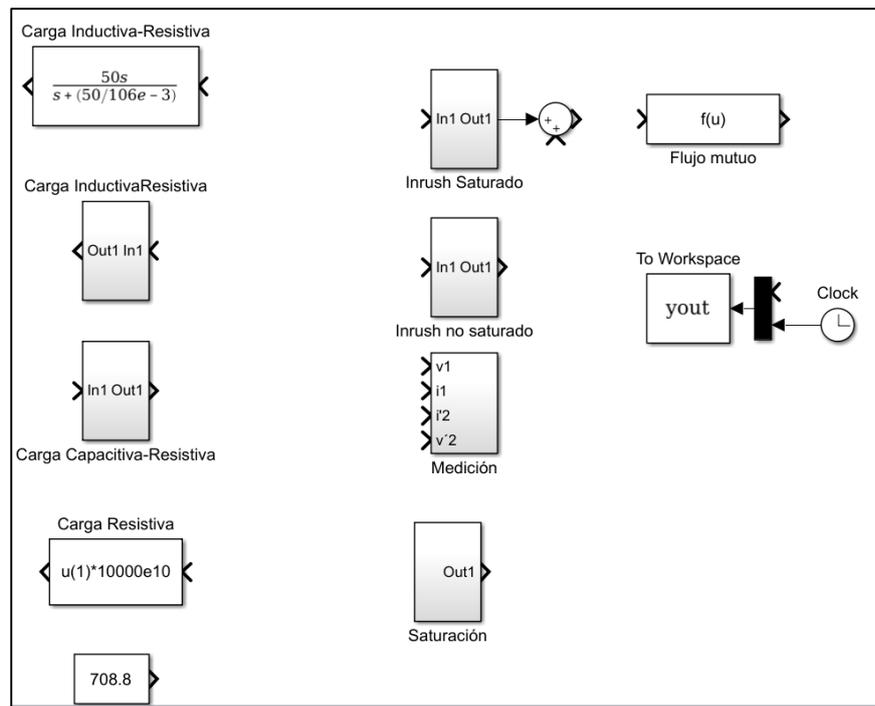
Figura I.7 Sub-sistema del esquema de la figura 5 del transformador.



Este sub-sistema permite visualizar mejor las variables que se encuentran en juego. Dentro del sub-sistema del transformador se tienen las variables de entrada y salida respectivamente mencionadas. Para incorporar la carga al transformador se necesita la corriente secundaria del transformador como entrada en el sub-sistema de carga, mientras que la salida del sub-sistema de carga es el voltaje secundario, que precisamente es la entrada del sub-sistema del transformador.

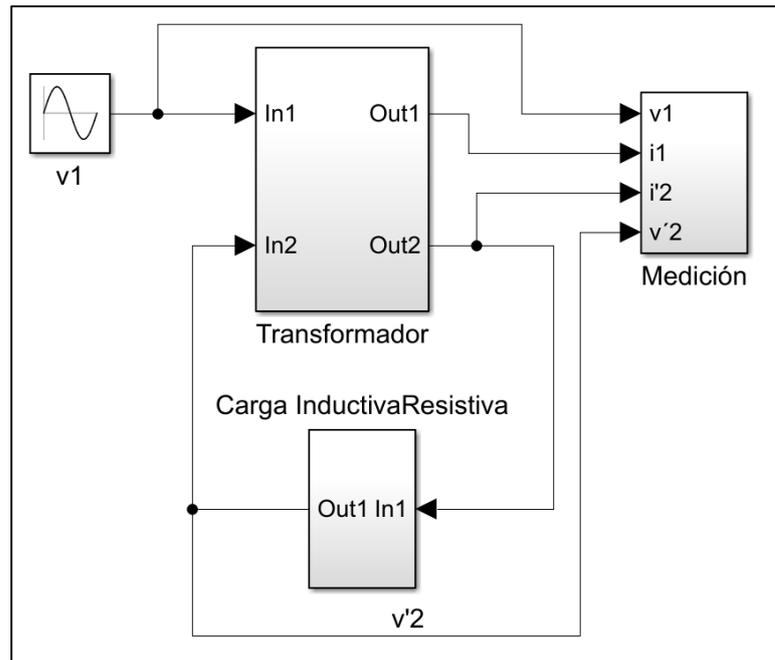
Para incorporar la carga al diagrama de la figura I.7 abra Matlab y diríjase a la carpeta **Proyectos** y seleccione el archivo denominado **Elementos.slx**, en dicha ventana encontrara los elementos necesarios para la simulación del transformador como se aprecia en la figura I.8. En la hoja de trabajo **Elementos.slx** seleccione el tipo de carga que desea incorporar.

Figura I.8 Elementos para la simulación de un transformador.



Una vez seleccionada la carga se conecta con el sub-sistema del transformador, recordando cual es la entrada y salida de cada sub-sistema. Un ejemplo se muestra en la figura I.9 en donde se ha seleccionado una carga Inductiva-Resistiva.

Figura I.9 Incorporación de la carga al diagrama de la figura I.7.



Si en la figura I.9 se desea simular un transformador en vacío o en cortocircuito, solamente se debe cambiar el tipo de carga a una de tipo **Resistiva** e ir incrementando o reduciendo el valor de la resistencia, dependiendo de qué es lo que se desee modelar.

1.4. Incorporación de la saturación del núcleo

Para incorporar la saturación al diagrama de la figura I.9 o I.7, solamente se debe incorporar el sub-sistema denominado **Saturación** el cual se encuentra en la carpeta **Proyectos /Elementos.slx**, para incorporar dicho bloque simplemente seleccione el sub-sistema **Saturación** y reemplace el bloque denominado **xm1** dentro del sub-sistema denominado **Transformador**, esta secuencia se muestra a continuación.

- Abra la hoja de trabajo ubicado en **Proyectos /Elementos.slx**.
- Una vez ahí, seleccione el bloque **Saturación**, como se muestra en la figura I.8.
- Abra el sub-sistema denominado **Transformador**.
- Elimine el bloque llamado **xm1**
- Coloque el bloque **Saturación** en el lugar donde se encontraba **xm1**, como muestra la figura I.10 y I.11.

Figura I.10 Transformador sin saturación.

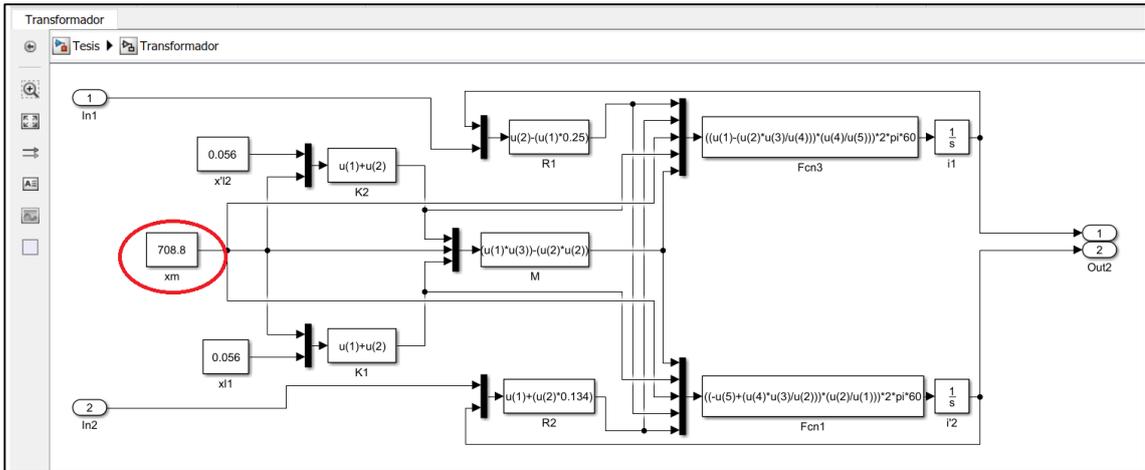
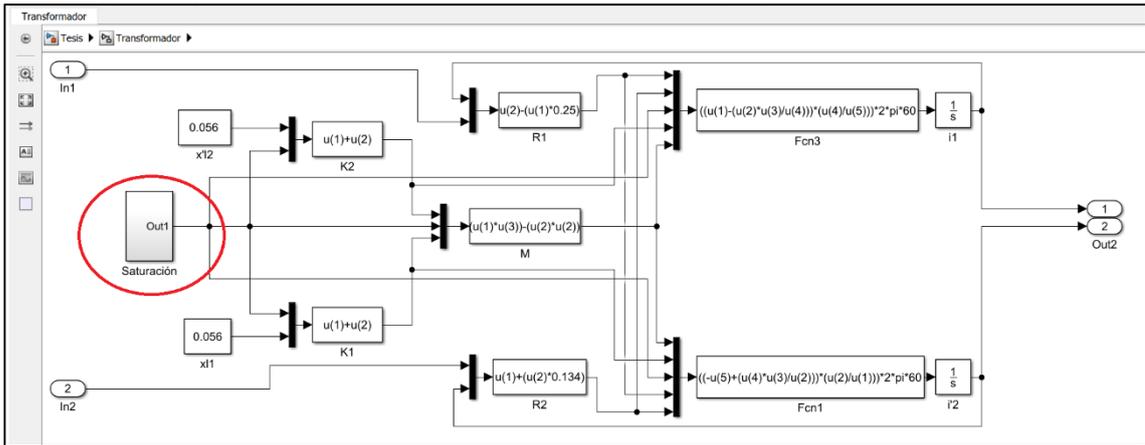
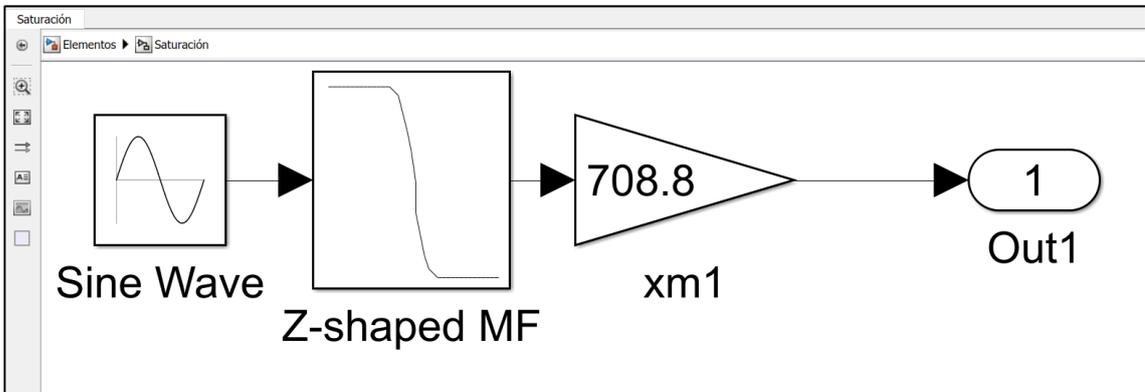


Figura I.11 Transformador con saturación.



Dentro del bloque saturación se tienen los elementos que se aprecian en la figura I.12.

Figura I.12 Elementos que conforman el sub-sistema saturación.

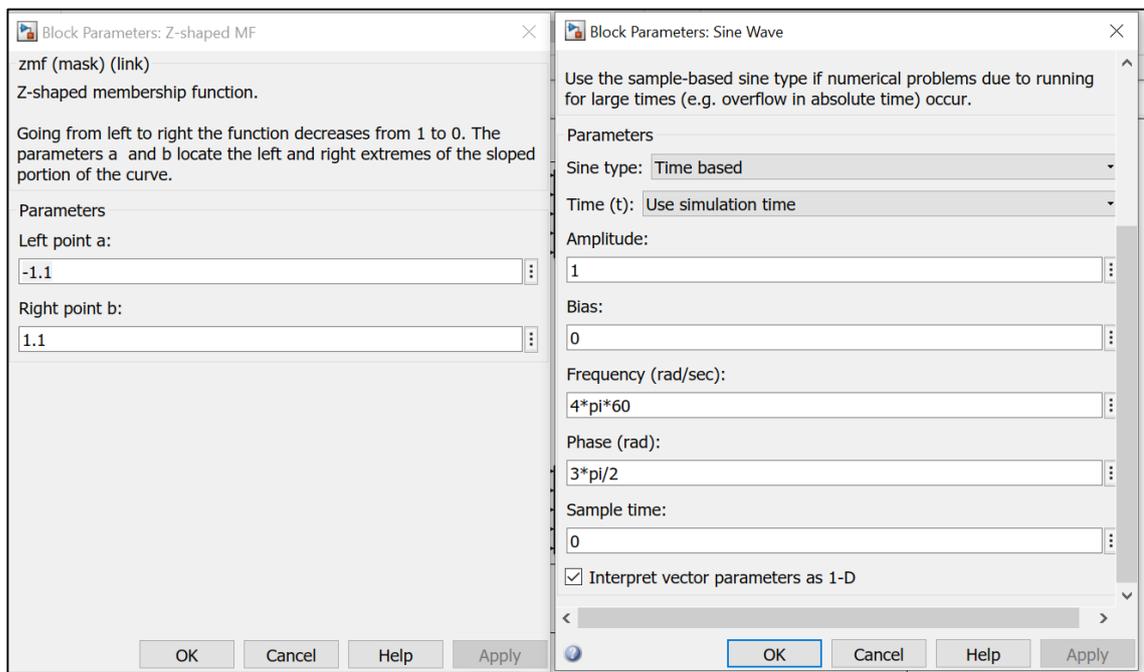


La salida del bloque **Saturación** es una onda que varía el valor de la reactancia mutua en vacío **xm1**, SE observa que además se tienen dos elementos más, los cuales se explican como sigue:

Para variar la curva de saturación de la reactancia mutua se procede a dar clic en el bloque **Z-shaped MF**, los datos estándar con el que se realizó la gráfica se muestran en la figura I.13. Para variar la curva de la reactancia mutua se procede a elevar los valores expuestos en la figura I.13 en el bloque **Z-shaped MF**, es decir para que la saturación sea menor se debe ir aumentando los valores expuestos en la figura I.13 para el bloque **Z-shaped MF**.

Para los datos del bloque **Sine Wave**, se tiene que colocar en una amplitud igual a 1 y la frecuencia será igual a $4 \cdot \pi \cdot 60$, mientras que el desfase será de $3 \cdot \pi / 2$, esto puede ser visto en la figura I.13 también. Los datos de este último bloque no se deben variar si se desea cambiar el valor de la saturación en el transformador.

Figura I.13 Parámetros a introducir en el diagrama de la figura I.12.



1.5. Incorporación de la corriente Inrush al transformador

Para estudiar el comportamiento de la corriente Inrush del transformador se utiliza el subsistema denominado **Corriente Inrush**, este bloque se lo puede encontrar en **Proyectos /Elementos.slx**, como se aprecia en la figura I.8.

Existen dos tipos de análisis de la corriente inrush en este modelo.

1.5.1. Corriente inrush sin saturación

El bloque para simular la corriente inrush sin saturación se llama **Inrush no saturado** el cual se encuentra abriendo la carpeta en **Proyectos/Elementos.slx**. Como en este caso no se necesita el sub-sistema de saturación, simplemente se incorpora el bloque de Corriente Inrush al esquema de la figura I.9 con una carga resistiva elevada para obtener el carácter de un transformador con circuito abierto. Dentro del sub-sistema **Inrush no saturado** se encuentran los datos que hacen que se produzca la corriente inrush dentro del transformador, esto se aprecia en la figura I.14.

Cada bloque representa una parte de la ecuación de la corriente inrush, dicha ecuación se muestra a continuación.

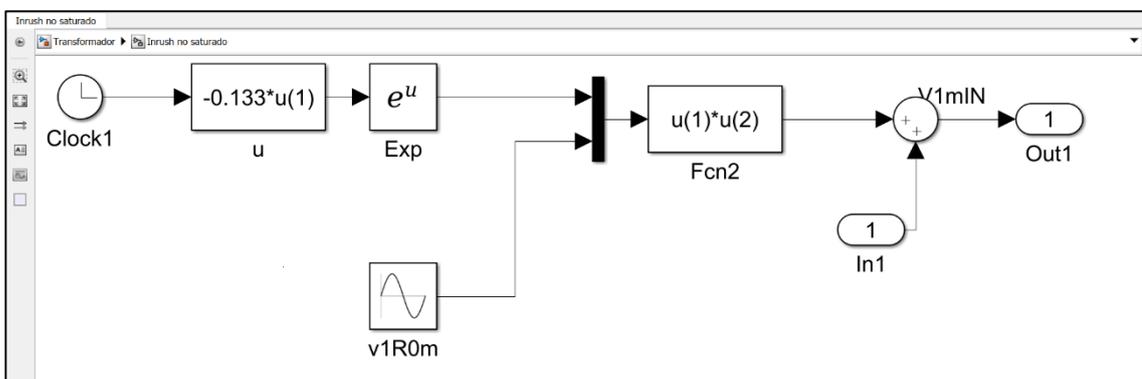
$$v_{1mIN} \approx V_m \sin(\omega t) + V_{1R_0m} \sin(\omega t) e^{-\frac{r_1 t}{L_1 + L_m}} \quad (\text{I.3})$$

La ecuación I.3 es la ecuación del voltaje primario que se necesita para generar la corriente inrush dentro del transformador, cuando este trabaja en vacío.

La primera ecuación del lado derecho de la ecuación I.3 $V_m \sin(\omega t)$, representa el voltaje de la fuente v_1 , mientras que la segunda ecuación $V_{1R_0m} \sin(\omega t) e^{-\frac{r_1 t}{L_1 + L_m}}$ representa el voltaje adicional que se produce en el devanado debido al flujo remanente pre-existente antes de la energización.

Se aprecia que la ecuación I.3 incorporada a un diagrama de bloques es justamente la que se muestra en la figura I.14.

Figura I.14 Elementos que conforman el sub-sistema de la corriente inrush sin saturación.



El bloque **Clock1** es el tiempo mientras que el bloque **u** es el exponente al que se encuentra elevado la variable e de la ecuación I.3 y el bloque **Exp**, de la figura I.14 el bloque de voltaje **v1R0m**, es el voltaje que se genera en la bobina primaria debido al flujo pre-existente, la

frecuencia de dicha fuente como se observa en la figura I.4 es la misma que la fuente de voltaje $v1$, mientras que la amplitud de la misma se calcula con la siguiente ecuación $V_{1R_0m} = w\lambda_{R0}$.

La entrada del sub-sistema **Inrush no saturado**, es la fuente de voltaje senoidal de la fuente primaria del transformador $v1$, mientras que la salida del sub-sistema es el voltaje que ingresa al transformador, esto se aprecia en la figura I.15.

1.5.2. Corriente inrush con saturación

Cuando se desea estudiar la corriente Inrush del transformador saturado, se utiliza el bloque o sub-sistema llamado **Inrush Saturado** de la figura I.8, o que se encuentra ubicado en la carpeta **Proyectos /Elementos.slx**. La entrada de este sub-sistema es precisamente la reactancia mutua xm cuando el transformador está saturado, es decir la entrada del sub-sistema **Inrush Saturado** es la salida del sub-sistema **Saturación**.

Esto se puede ver más claramente en el esquema de la figura I.16, en donde se muestra cómo va conectado el sub-sistema de la corriente inrush cuando el transformador trabaja en vacío y saturado.

Figura I.15 Transformador con corriente inrush no saturado en vacío.

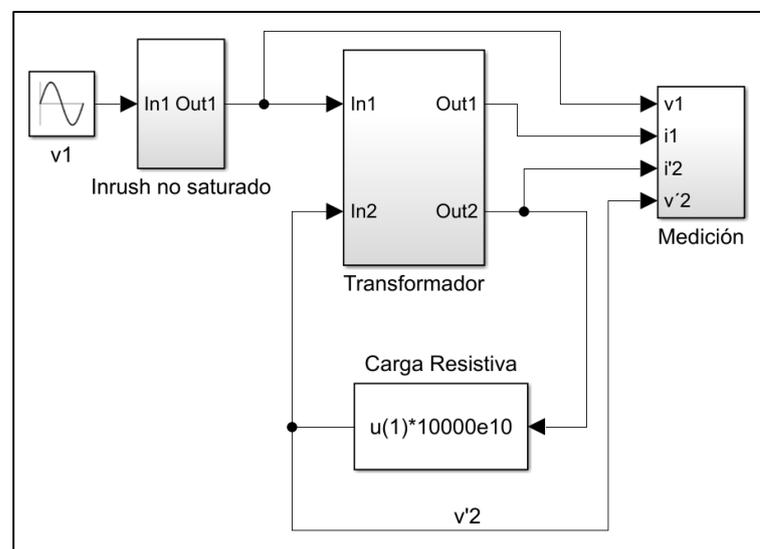
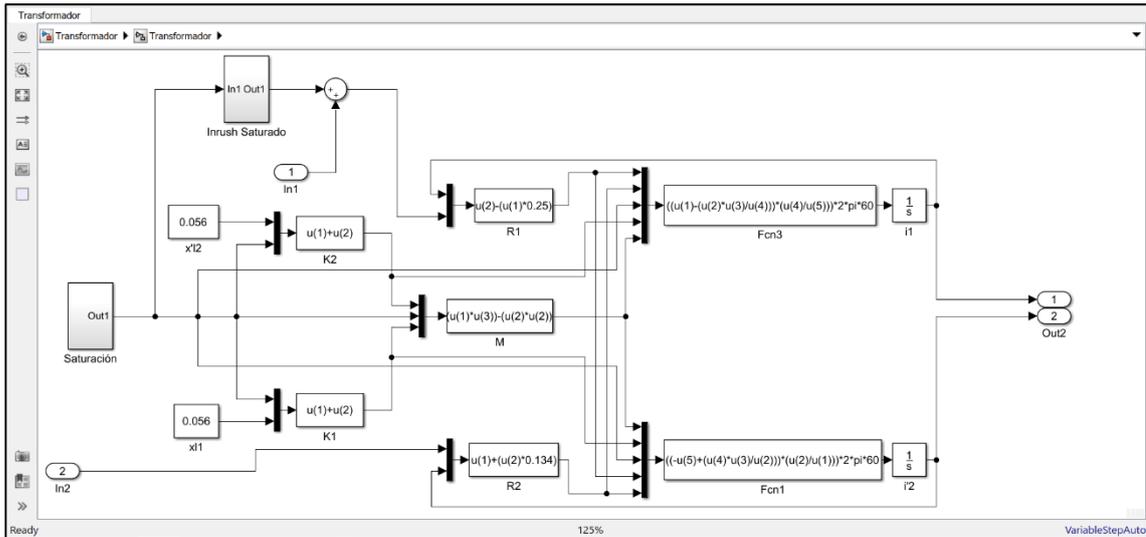


Figura I.16 Transformador con corriente inrush saturado en vacío.

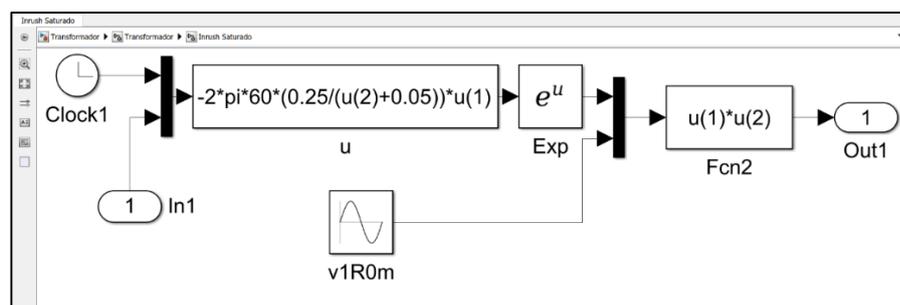


Se debe mencionar que a diferencia del bloque inrush no saturado, el bloque inrush saturado va conectado dentro del sub-sistema **Transformador** ya que la entrada del bloque **Inrush Saturado** es la salida del bloque **Saturación**.

Se puede ver además que el bloque **Saturación** posee un bloque denominado **SUMA**, en donde como lo exige la ecuación I.3 es la suma del voltaje de la fuente v_1 que es precisamente la entrada de un transformador ideal como se muestra en la figura I.7.

Dentro del bloque **Inrush Saturado** se tiene los siguientes parámetros, tal y como se muestra en la figura I.17, en donde los parámetros no han cambiado con los mostrados en la figura I.14. La única diferencia que se aprecia es que ahora la entrada de dicho sistema es la salida del bloque **Saturación** que en el esquema representa la variación de la reactancia mutua x_{m1} y como esta ahora es una variable se lo incorpora como una dentro del sub-sistema **Inrush Saturado**. La salida sigue siendo el voltaje total que ingresa al transformador.

Figura I.17 Elementos que conforman el sub-sistema de la corriente inrush con saturación.

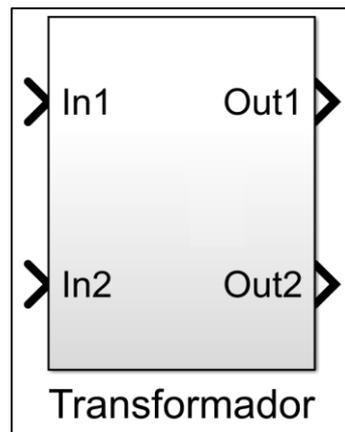


1.6. Conexión trifásica a partir de bancos monofásicos

En base a lo estudiado anteriormente, a continuación se mostrara las ecuaciones necesarias y el método para realizar el diagrama de bloques de un transformador trifásico a partir de bancos monofásicos.

Para ello al esquema de la figura I.3 se lo convertirá en un subsistema para tener una mejor visualización para la conexión trifásica.

Figura I.18 Subsistema de un transformador monofásico.



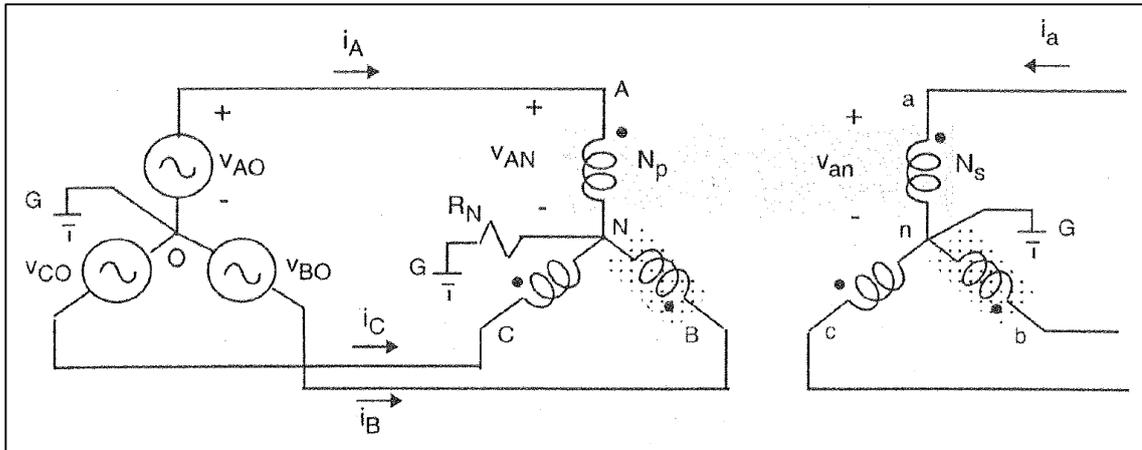
En la figura I.18 se observa el sub-sistema conformado por el transformador de la figura I.3 y el que se usara para las conexiones trifásicas que se verán a continuación.

1.6.1. Conexión trifásica Y- Y

Para la realización del diagrama de bloques del banco trifásico de transformadores se partirá de la figura I.19. En donde se puede observar que se tiene los devanados primario y secundario del transformador y la fuente de voltaje trifásica conectada en estrella. El sentido de la fuente de voltaje elegido será positivo es decir en sentido a, b, c.

Una vez más resulta recalcar que el sentido de la corriente i_a que se muestra en la figura 10.32 será designado al sentido contrario, ya que así lo exige la esquematización que se realizó anteriormente.

Figura I.19 Banco trifásico de transformadores monofásicos conectados en Y.



Fuente: [1].

Aplicando las leyes de Kirchoff a cada una de las mallas del esquema de la figura I.19 en donde se encuentra la fuente y las bobinas del primario de cada transformador, se obtienen el siguiente conjunto de ecuaciones, en donde los voltajes de entrada a cada una de las bobinas están dadas por:

$$V_{AO} - V_{RN} = V_{AN} \quad (\text{I.4a})$$

$$V_{BO} - V_{RN} = V_{BN} \quad (\text{I.4b})$$

$$V_{CO} - V_{RN} = V_{CN} \quad (\text{I.4c})$$

En donde V_{RN} (Voltios) representa la caída de voltaje en la resistencia a tierra, en el caso de que el banco trifásico tenga en cuenta la resistencia del terreno. Obteniendo las corrientes de Kirchoff del circuito del lado izquierdo de la figura I.19 se tiene:

$$I_A + I_B + I_C = I_{RN} \quad (\text{I.5})$$

En donde I_{RN} (Amperios) representa la corriente que circula por la resistencia a tierra en el caso de que esta exista. Para calcular V_{RN} se tiene lo siguiente:

$$V_{RN} = I_{RN} * R_N \quad (\text{I.6})$$

Para los voltajes secundarios del transformador se realiza el mismo método planteado anteriormente, teniendo en cuenta una carga trifásica conectada en Y.

$$V_{aL} + V_{RN_s} = V_{an} \quad (\text{I.7a})$$

$$V_{bL} + V_{RN_s} = V_{bn} \quad (\text{I.7b})$$

$$V_{cL} + V_{RN_s} = V_{cn} \quad (\text{I.7c})$$

En donde V_{an} , V_{bn} , V_{cn} , representan los voltajes de salida secundarios de cada devando del transformador y V_{aL} , V_{bL} , V_{cL} , son los voltajes de la carga trifásica conectada en Y, mientras que V_{RN_s} es la caída de voltaje en la resistencia a tierra que se encuentra en el secundario del banco trifásico.

La caída de tensión en la resistencia a tierra se calcula tal como se muestra en la ecuación I.8.

$$V_{RN_s} = (i_a + i_b + i_c) * R_{N_s} \quad (I.8)$$

Llevando las ecuaciones I.4 a I.8 a SIMULINK, se obtiene la gráfica que se muestra en la figura I.20. Esta figura muestra solamente la conexión de un banco trifásico conectado en estrella, tanto del lado primario como del secundario, en el caso en que la fuente o carga se encuentre conectada en delta, se deben usar las herramientas que ofrece el análisis de circuitos eléctricos para transformar un banco trifásico de carga conectada en delta a un banco trifásico de carga conectado en estrella, esto se puede ver en las bibliografías [2], [3] y [4].

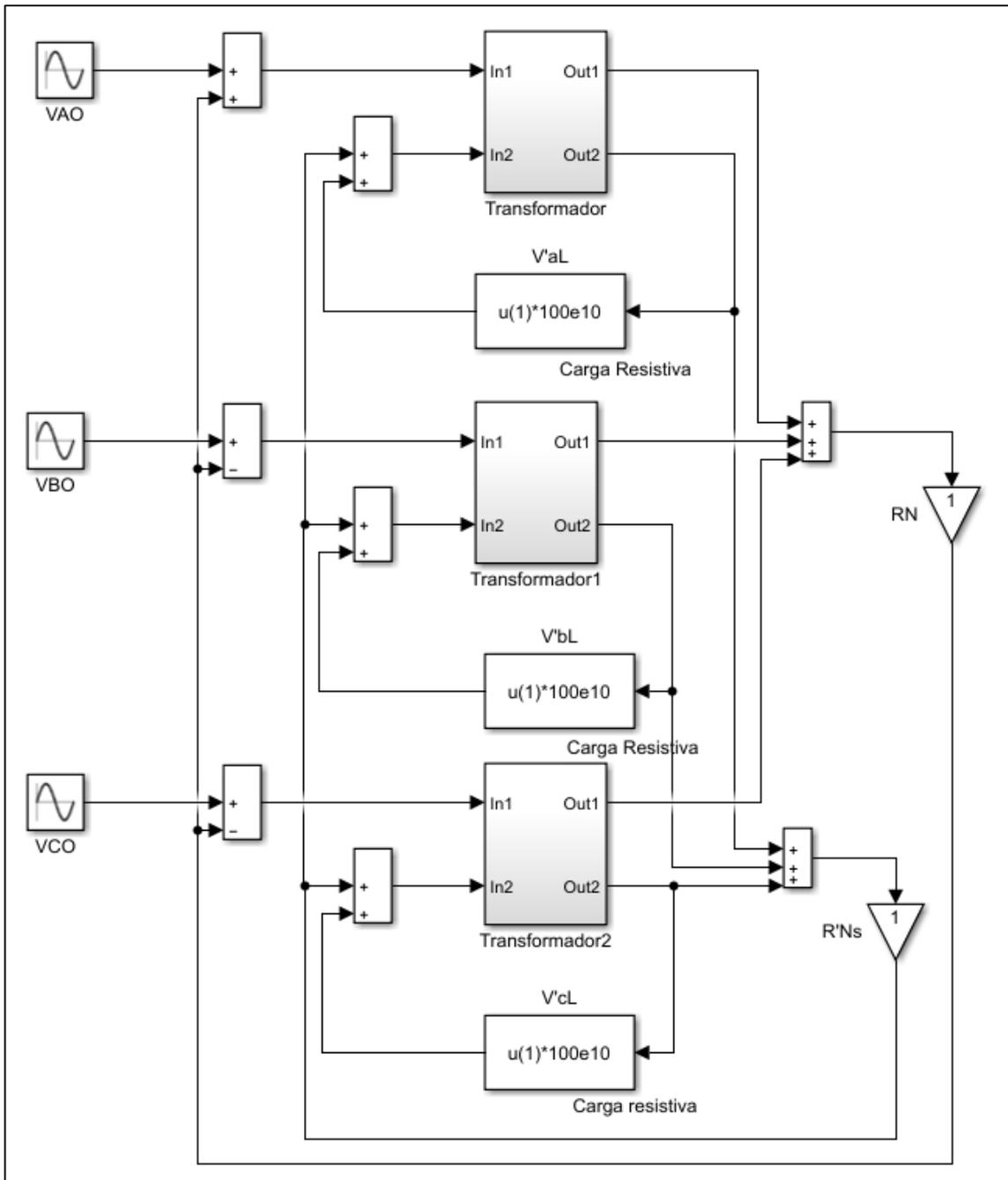
1.6.1.1. Funcionamiento en vacío sin saturación

Las gráficas de voltajes y corrientes del transformador de la figura I.20 cuando se encuentra funcionando en vacío sin saturación se aprecian en las figuras I.21 e I.22 respectivamente.

Como se aprecia en la figura I.21, tanto los voltajes primarios como secundarios de los devanados son iguales ya que el banco trifásico está trabajando sin carga. Cabe mencionar que los voltajes mostrados son los voltajes que ingresan a los devanados. En la misma figura (figura I.21) también se aprecian los voltajes a tierra tanto del lado primario como secundario cuando estas tienen una resistencia de 50 ohm . Como se observa en la figura, dichos voltaje son igual a cero, esto debido a que las corrientes son balanceadas, en este caso las corrientes primarias que se aprecian en la figura I.22.

Las corrientes mostradas en la figura I.22 corresponden a las corrientes primarias y secundarias del banco trifásico cuando este está trabajando en vacío sin saturación. Las corrientes secundarias como era de esperarse son igual a cero ya que no existe carga alguna.

Figura I.20 Conexión trifásica Y-Y mediante bancos monofásicos.



El desfase de las corrientes primarias que se observa en la figura I.22 se debe al ángulo de desfase en el que se encuentra el voltaje en el momento de la energización, esto se mencionó anteriormente cuando se analizó el comportamiento de la corriente inrush.

Figura I.21 Voltajes de un banco trifásico Y-Y funcionando en vacío sin saturación.

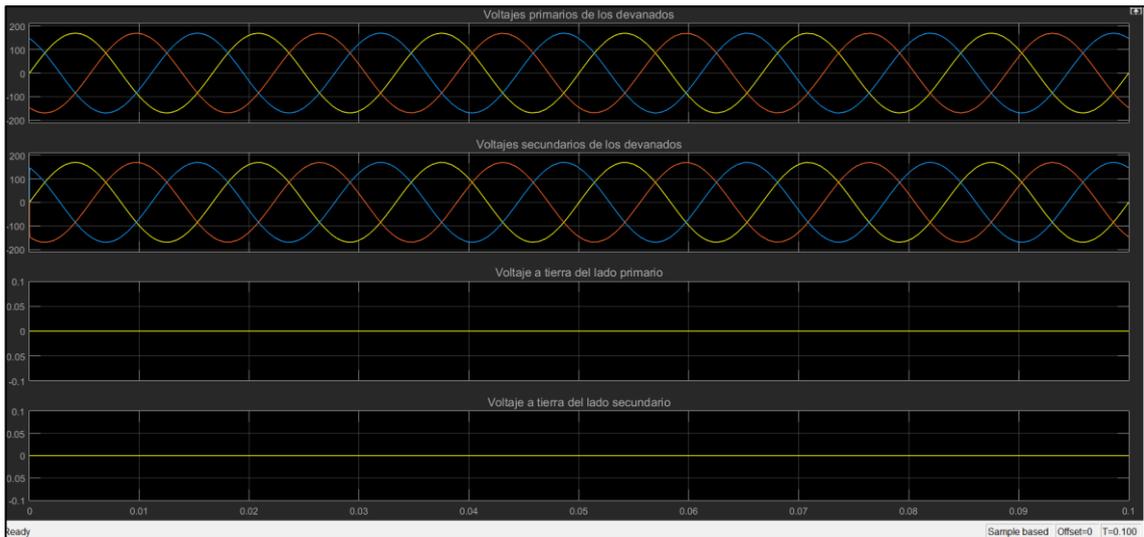
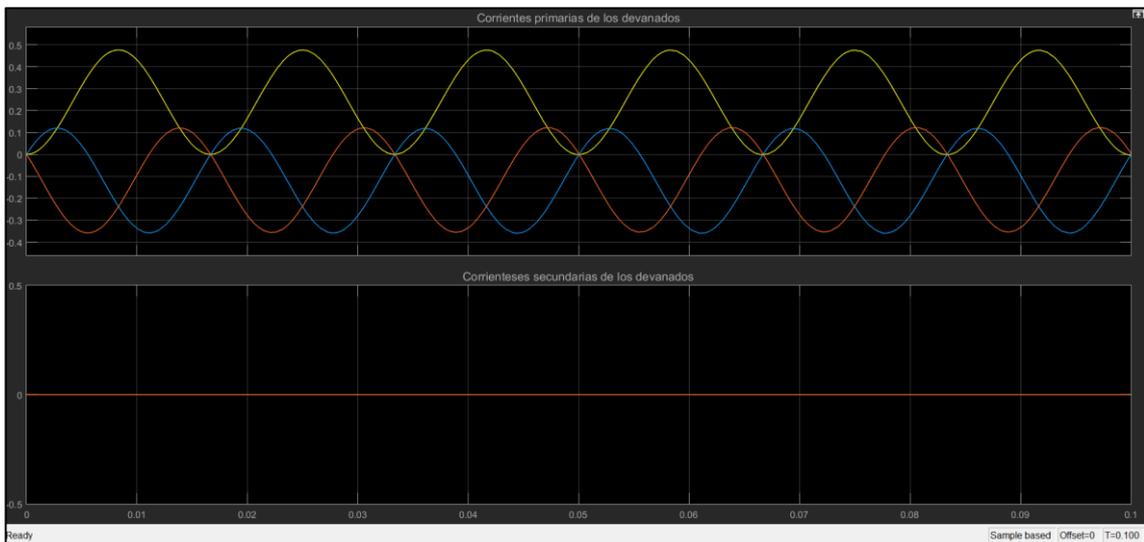


Figura I.22 Corrientes de un banco trifásico Y-Y funcionando en vacío sin saturación.



1.6.1.2. Funcionamiento en carga sin saturación

Ingresando los datos de una carga Inductiva-Resistiva los cuales se muestran en la tabla 10.2, las cuales están conectadas en paralelo, se obtienen las gráficas de voltajes y corrientes mostradas en las figuras I.23 e I.24 respectivamente. Como se aprecia en la figura I.23 los voltajes no han cambiado en comparación con los mostrados en la figura I.21, esto es más que obvio ya que el voltaje no debe sufrir cambios significativos cuando se conecta una carga al transformador.

Sin embargo al existir una carga trifásica conectada en Y al transformador, las corrientes tanto primaria y secundaria se incrementan tal y como se aprecia en la figura I.24, pero cabe

mencionar que dichas corrientes no presentan desbalances, por lo que los voltajes a tierra son igual a cero.

Figura I.23 Voltajes de un banco trifásico Y-Y funcionando con carga sin saturación.

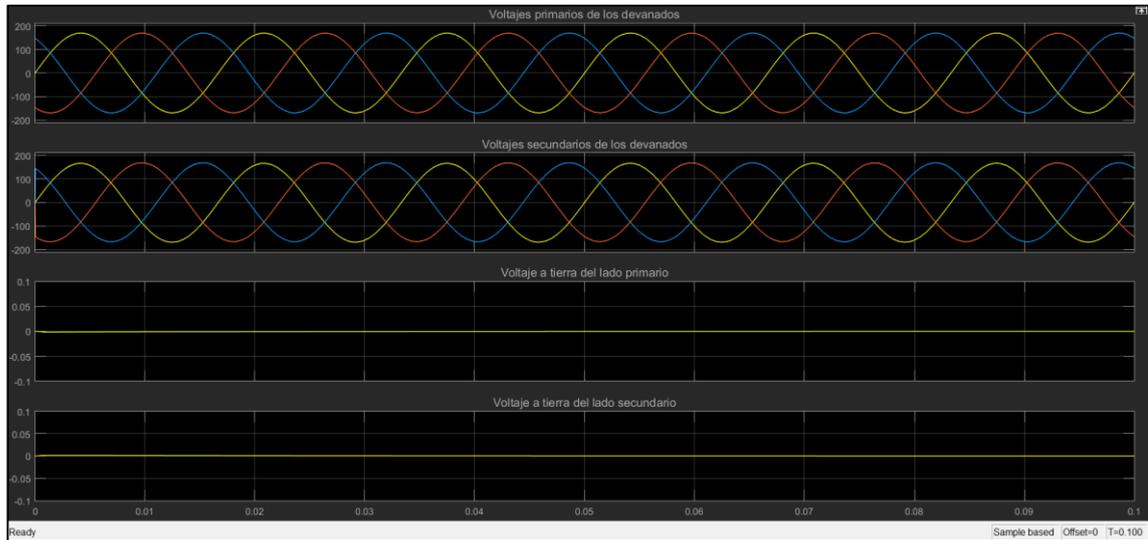
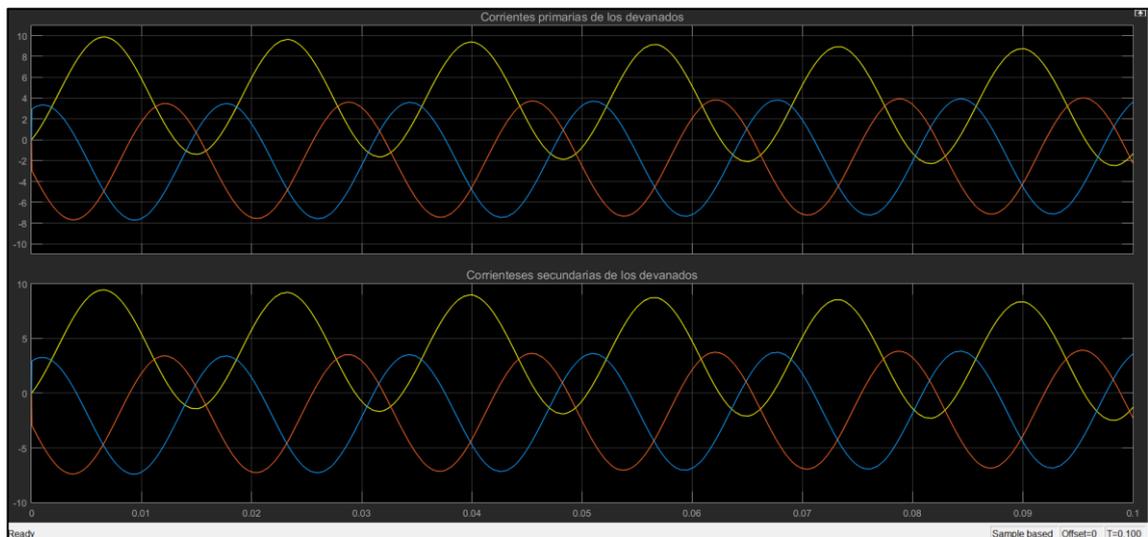


Figura I.24 Corrientes de un banco trifásico Y-Y funcionando con carga sin saturación.



1.6.1.3. Funcionamiento en carga con saturación

Cuando se conectan los bancos monofásicos en un banco trifásico se obtienen graficas de voltajes y corrientes que se aprecian en las figuras I.25, I.26 e I.27 respectivamente.

En la figura I.25 se observa los voltajes primarios y secundarios del banco trifásico, se observa que dichos voltajes no han sufrido ningún cambio en comparación con las figuras I.21 e I.23.

Figura I.25 Voltajes de un banco trifásico Y-Y funcionando con carga saturado.

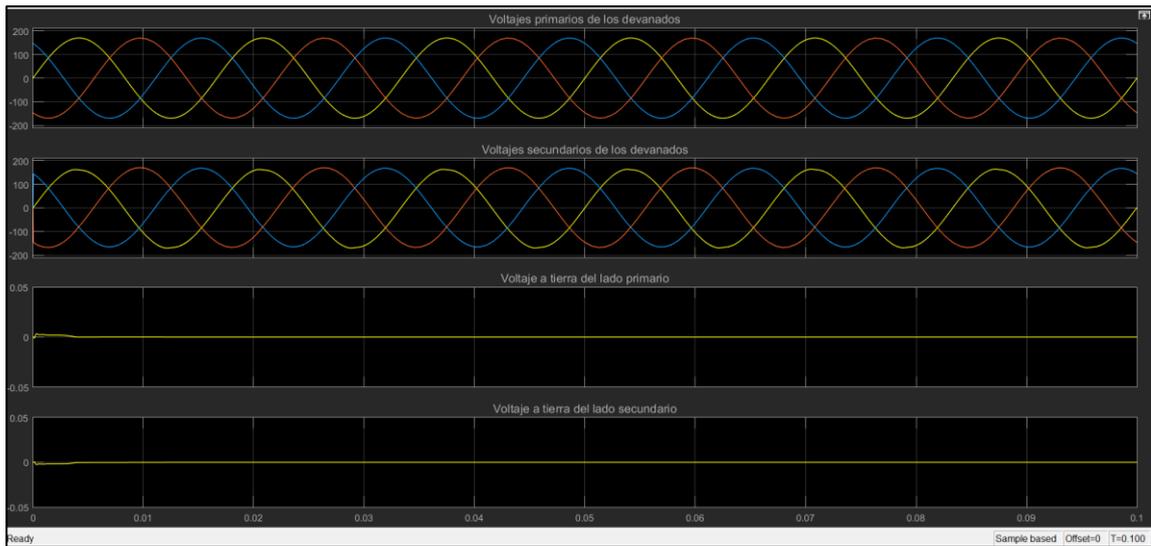
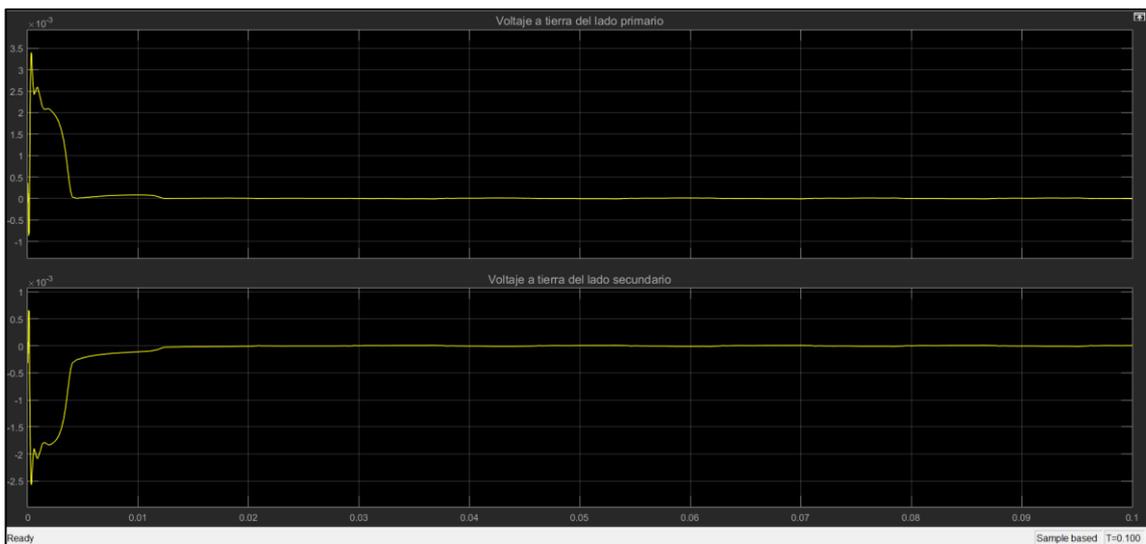


Figura I.26 Voltaje a tierra

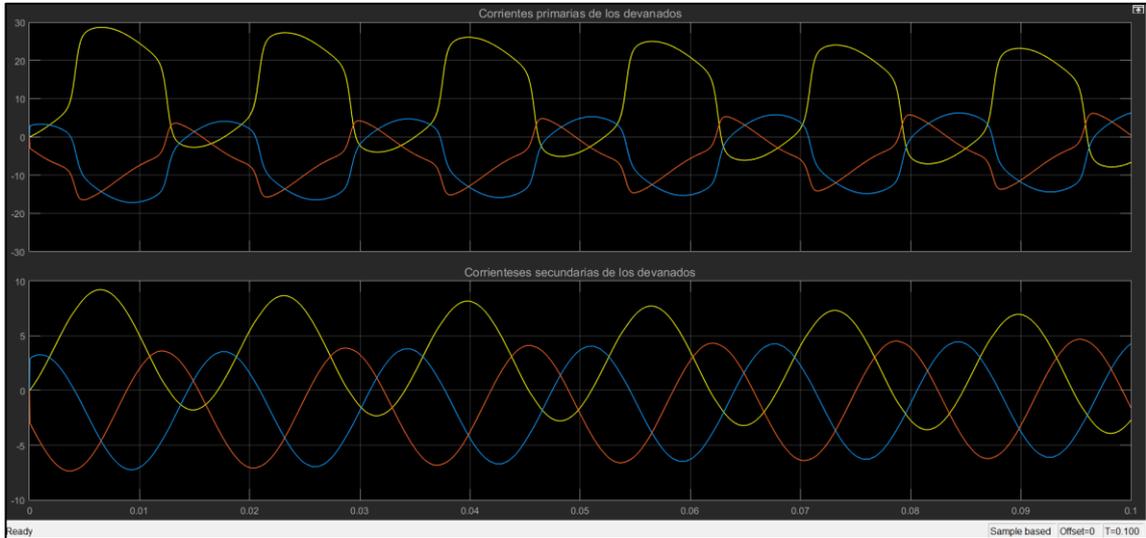


Sin embargo cuando el transformador se encuentra saturado las corrientes primarias sufren una deformación las cuales pueden ser observadas en la figura I.27. Se debe resaltar que a pesar de que las corrientes primarias se encuentran deformes, las corrientes secundarias no sufren ninguna deformación y tampoco se incrementa su magnitud, esto se puede apreciar si se comparan las figuras I.24 y I.27 para las corrientes secundarias. Sin embargo las corrientes primarias si se incrementaron en magnitud, esto debido al efecto de la saturación en el núcleo del transformador.

Debido a que las corrientes primarias tienen componentes armónicas, el voltaje a tierra tanto del lado primario y secundario tiende a incrementarse un poco, pero solamente en un periodo corto de tiempo, estos voltajes se aprecian en la figura I.26, en donde como se ve aún siguen

siendo aproximadamente cero, pero en este caso presenta una característica transitoria, sin embargo esto no afecta en nada al voltaje primario y secundario de los devanados.

Figura I.27 Corrientes de un banco trifásico Y-Y funcionando con carga saturado.



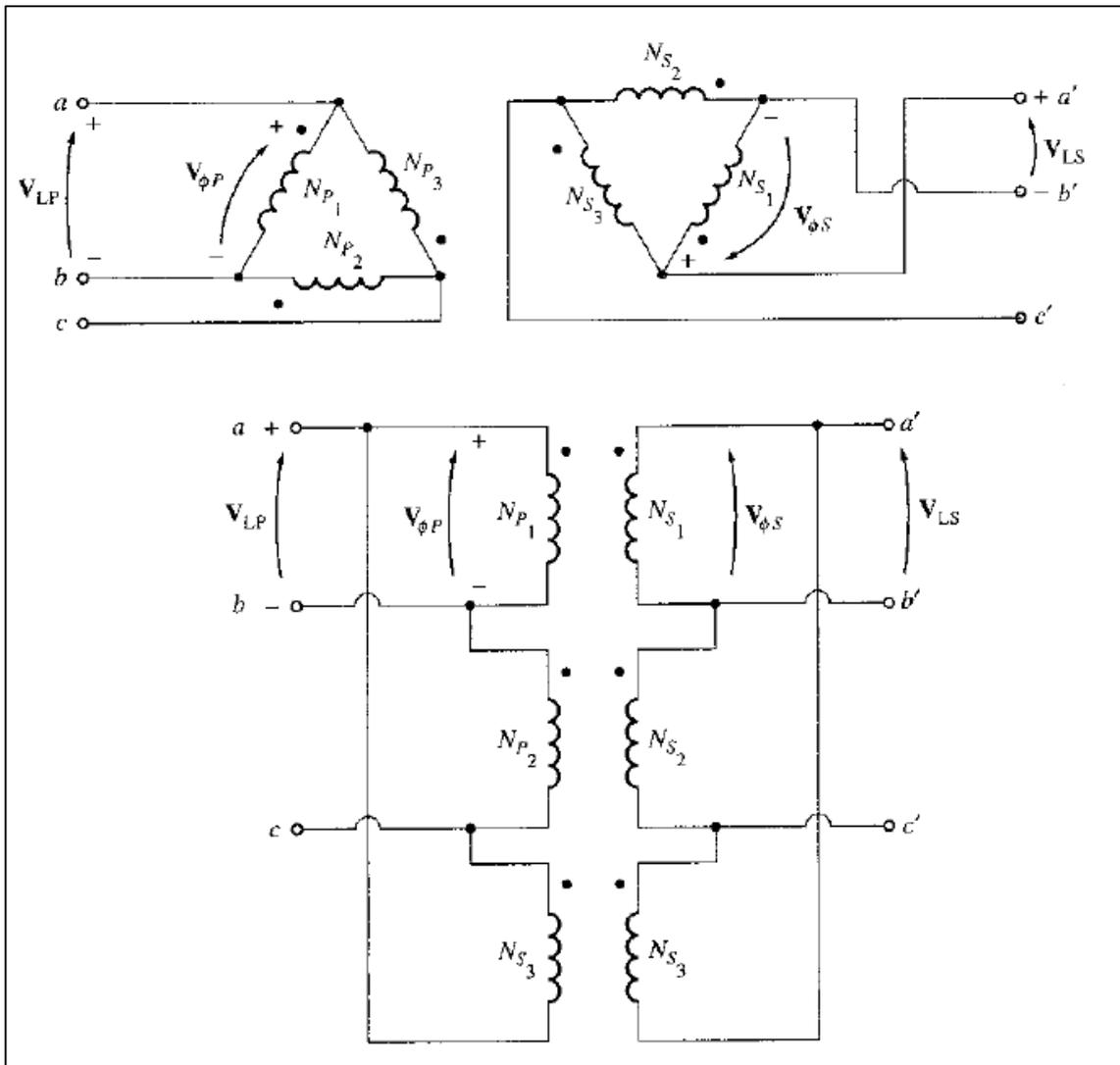
1.6.2. Conexión trifásica Δ - Δ

La conexión trifásica Δ - Δ a partir de bancos monofásicos se aprecia en la figura I.28, en donde al igual que la conexión Y-Y los voltajes tanto del lado primario como del lado secundario se encuentran en fase.

Realizando el análisis mostrado en la conexión Y-Y de la sección anterior, en donde solamente se aplican las relaciones de voltaje de entrada como de salida y al conocer que la conexión delta carece de una puesta a tierra, se obtiene la gráfica que se puede apreciar en la figura I.29.

Es claro que se puede conectar el banco monofásico en los diferentes tipos de conexiones de transformadores trifásicos, esto resulta de gran ayuda para el análisis y estudio de transformadores trifásicos. Asimismo a cada banco trifásico se lo puede incorporar los subsistemas tanto para que trabaje saturado, o también el análisis de la corriente inrush, ya que como se lo realizó anteriormente cada subsistema va conectado al transformador monofásico, afectando así a todo el transformador trifásico.

Figura I.28 Banco trifásico de transformadores monofásicos conectados en delta.



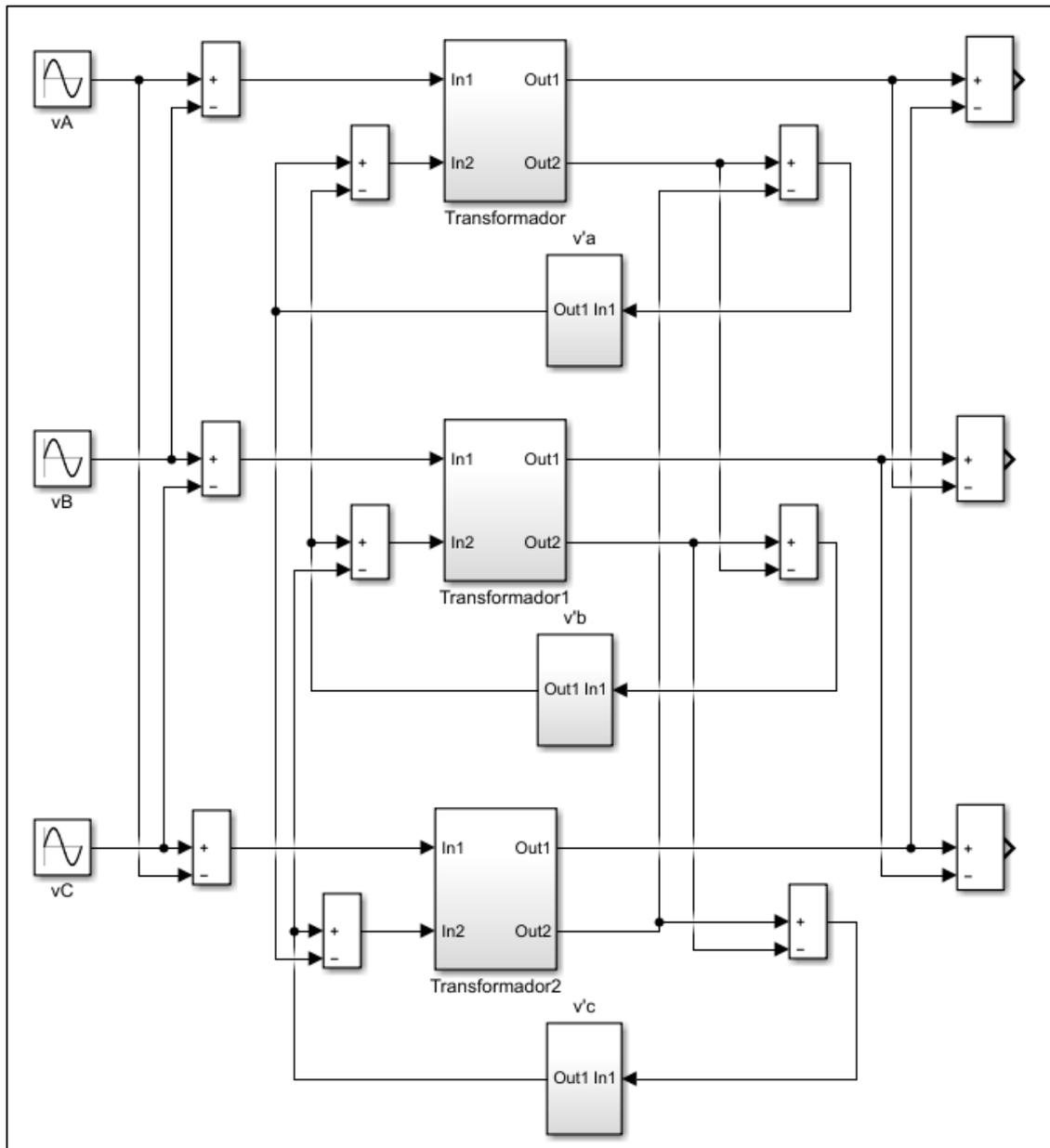
Fuente: [5].

En la conexión Δ - Δ de nuestro esquema, tanto la carga como la fuente están conectados en estrella, por lo que los voltajes de fase y de línea van a diferir. En una conexión en delta, tanto los voltajes de línea como de fase son iguales, sin embargo en una conexión en Y estos voltajes varían en una relación de $\sqrt{3}$ y un ángulo de 30 grados, siendo el voltaje de línea mayor al voltaje de fase.

Si a nuestro esquema lo conectamos a una carga Inductiva-Resistiva como en la conexión Y-Y sin saturación, se obtienen los voltajes de fase y de línea tanto del lado primario como secundario que se pueden apreciar en las figuras I.30 y I.31 respectivamente.

Como se observa en dichas figuras tanto el voltaje de línea como el voltaje de fase se encuentran desfasados y el voltaje de línea cuya amplitud es $\sqrt{3}$ mayor también se aprecian en las figuras.

Figura I.29 Conexión trifásica Δ - Δ mediante bancos monofásicos.



Las corrientes de línea por otra parte se observan en la figura I.32, en donde cómo se pueden apreciar son ondas sinusoidales puras, cuya amplitud difieren de igual manera con las corrientes de fase de los devanados del transformador.

La conexión Δ - Δ mostrada al igual que en la conexión Y - Y se le puede agregar la saturación para estudiar su comportamiento, también se pueden agregar diferentes tipos de cargas e incluso estudiar el banco trifásico con una fuentes o cargas desbalanceadas, esto ayudara el estudiante o persona interesada en el tema a conocer más acerca del comportamiento de los transformadores.

Figura I.30 Voltajes de fase y línea primarios de un banco trifásico Δ - Δ con carga no saturado.

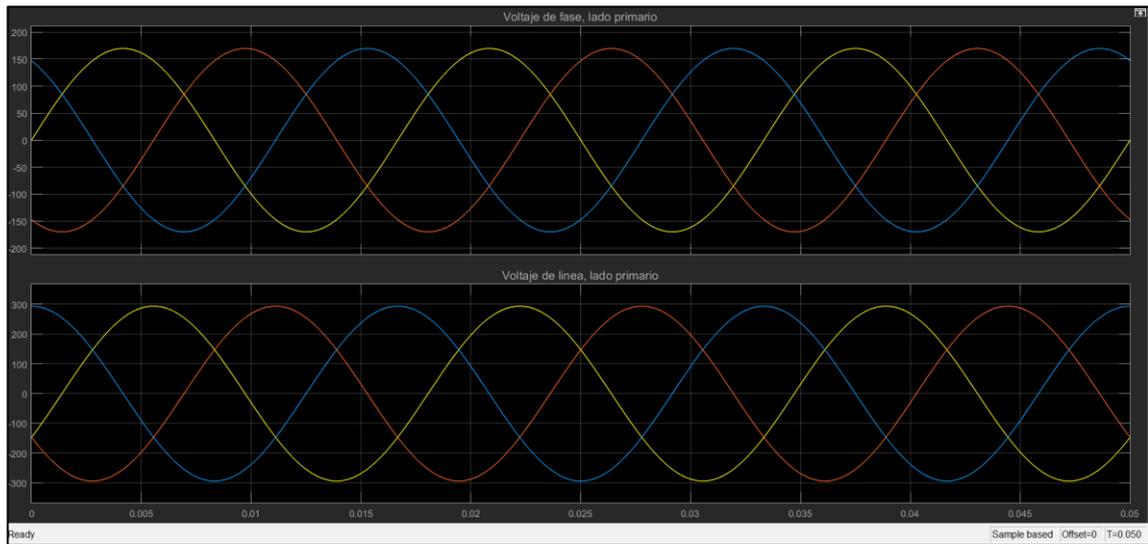


Figura I.31 Voltajes de fase y línea secundarios de un banco trifásico Δ - Δ con carga no saturado.

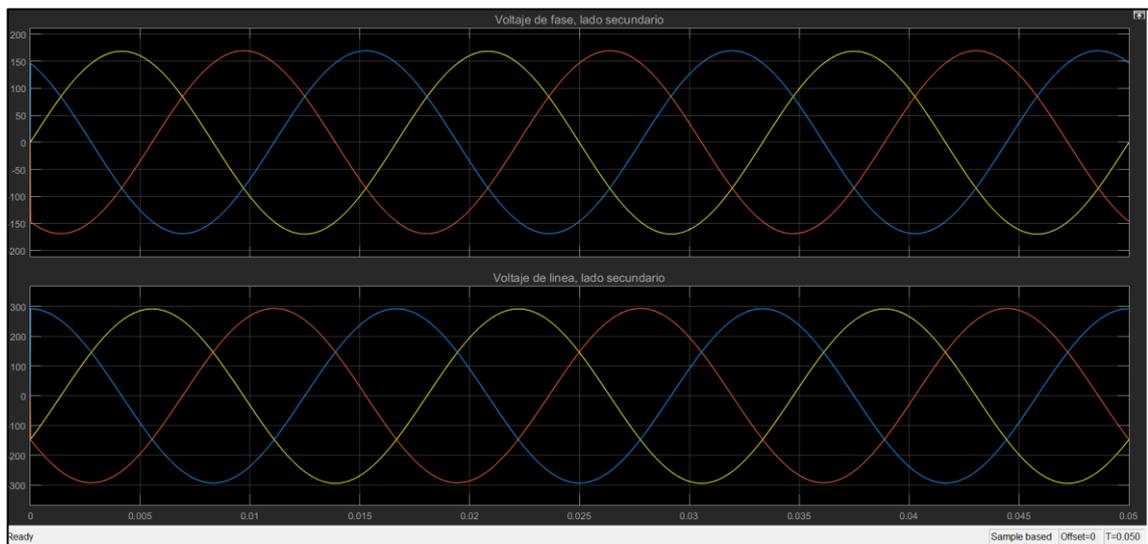
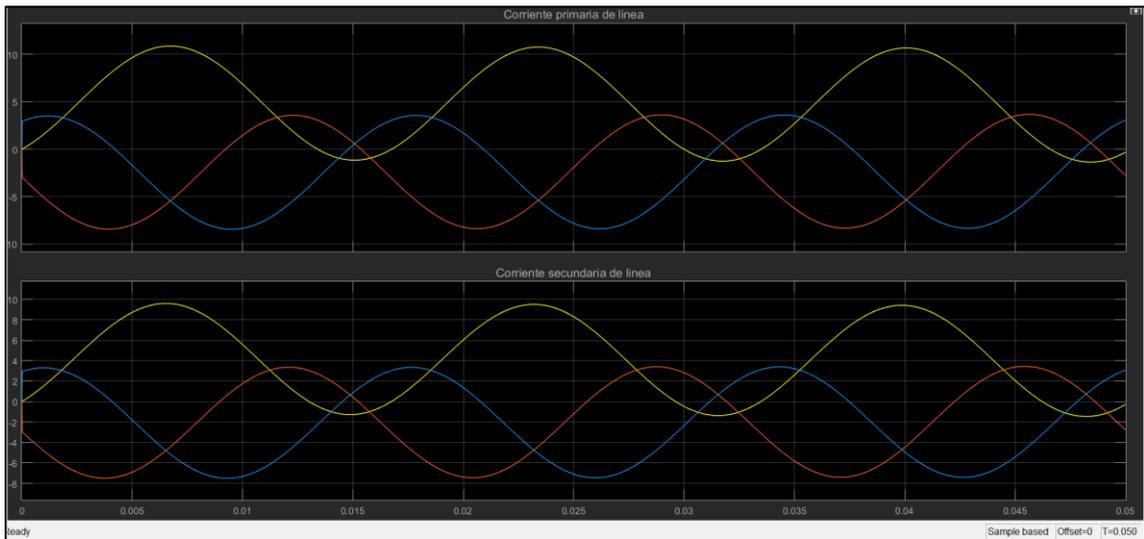


Figura I.32 Corrientes de línea primaria y secundaria de un banco trifásico Δ - Δ con carga no saturado.



1.7. Conexión como autotransformador

En ciertas ocasiones es deseable cambiar los niveles de voltaje únicamente en una pequeña cantidad, estos pequeños incrementos pueden ser necesarios debido a una caída de voltaje en un sistema de potencia localizado lejos de los generadores, en mencionadas circunstancias es un desperdicio y demasiado costoso elaborar un transformador con dos devanados completos dimensionados para casi el mismo voltaje. En su lugar, se utiliza un transformador de propósito especial llamado autotransformador [5].

Existen dos tipos de autotransformadores, los cuales se pueden apreciar en las figuras I.33 e I.34. Estos autotransformadores son conocidos como autotransformador elevador y reductor.

Para incorporar el modelo de un autotransformador a nuestro transformador en **SIMULINK** se deben establecer los voltajes y corrientes tanto de entrada como de salida respectivos.

1.7.1. Conexión como autotransformador reductor

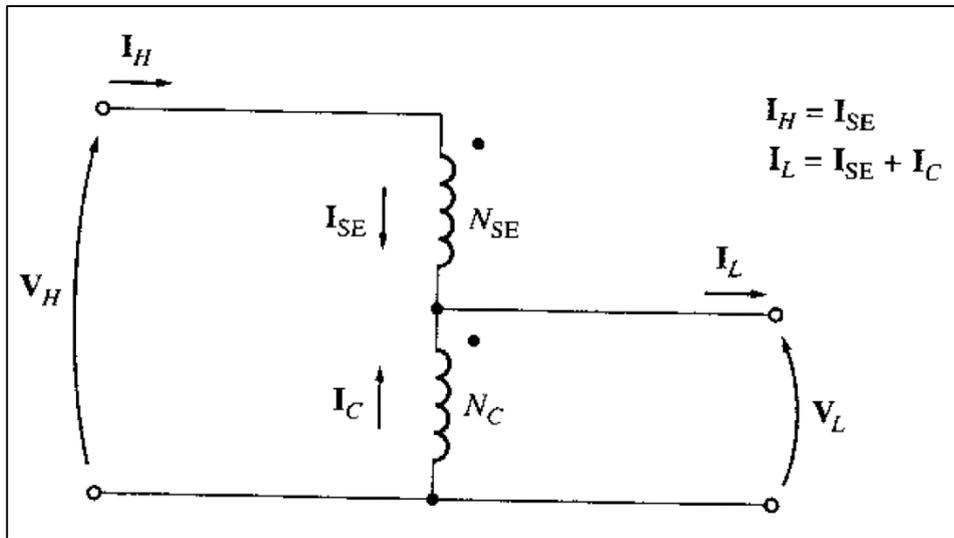
Para realizar la conexión del autotransformador reductor en **SIMULINK** se utilizara el transformador monofásico de la figura I.18. Las conexiones extras para dicha conexión se obtendrán a partir de la figura I.33 de la siguiente manera.

Cuando un transformador se conecta como autotransformador reductor los devanados tanto primario como secundario se conectan de forma aditiva, por lo que el voltaje total de entrada, es la suma de los voltajes de los devanados primario y secundario, tal y como se aprecia en la ecuación I.8.

$$V_H = V_{SE} + V_C \quad (\text{I.8})$$

En donde V_H representa el voltaje total que ingresa al autotransformador, mientras que el voltaje serie V_{SE} es el voltaje del devanado primario, se le designa devanado serie por que se encuentra conectado en serie con el devanado secundario o devanado común V_C , este último es llamado así debido a que su voltaje es común al voltaje de salida V_L como se muestra en la ecuación I.9.

Figura I.33 Conexión de un autotransformador reductor.



Fuente: [5].

$$V_L = V_C \quad (\text{I.9})$$

Analizando los nodos de la figura I.33 se observa que las corrientes cumplen con las ecuaciones mostradas en la ecuación I.10.

$$I_H = I_{SE} \quad (\text{I.10a})$$

$$I_L = I_{SE} + I_C \quad (\text{I.10b})$$

En donde los subíndices de las corrientes tienen el mismo significado que los voltajes los cuales se explicaron anteriormente. Las relaciones tanto de voltaje de entrada y salida con los respectivos voltajes internos del transformador se obtienen de la siguiente manera:

En el caso ideal sabemos que:

$$\frac{V_{SE}}{V_C} = \frac{N_{SE}}{N_C} \quad (\text{I.11})$$

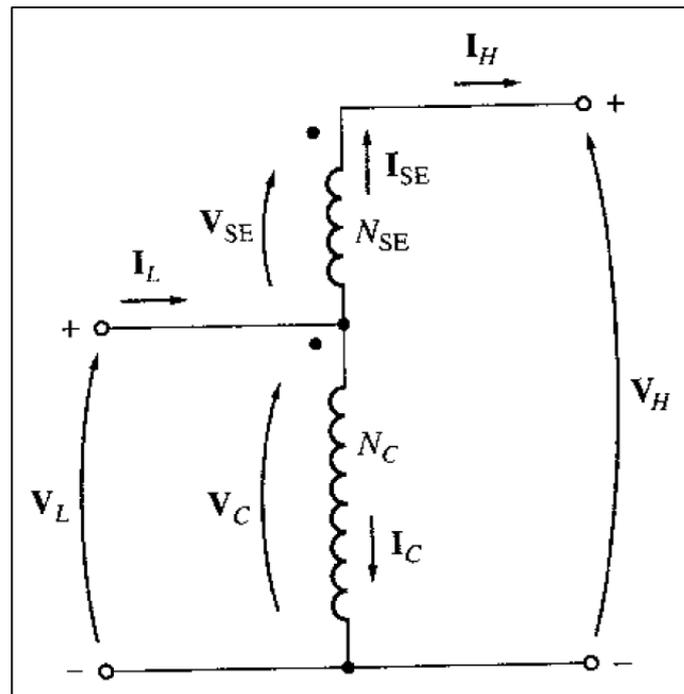
Reemplazando la ecuación I.11 dentro de la I.8 para el voltaje serie V_{SE} tenemos:

$$\frac{V_H}{V_L} = \left(\frac{N_{SE} + N_C}{N_C} \right) \quad (\text{I.12})$$

La ecuación I.12 representa la relación de transformación de los voltajes de entrada con los de salida del autotransformador. De la misma forma la relación de las corrientes está dada por:

$$\frac{I_H}{I_L} = \left(\frac{N_C}{N_{SE} + N_C} \right) \quad (\text{I.13})$$

Figura I.34 Conexión de un autotransformador elevador.



Fuente: [5].

Incorporando las ecuaciones I.8, I.9 e I.10 al diagrama de la figura I.18, se obtiene el esquema que se aprecia en la figura I.35. En dicha figura la entrada **In1** representa el voltaje V_{SE} serie o el voltaje del devanado primario del transformador, la entrada **In2** es el voltaje común V_C o voltaje secundario del transformador.

Las salidas **Out1** y **Out2** son las corrientes serie y común respectivamente o que es lo mismo, son la corriente primaria del devanado y la corriente de salida del autotransformador.

En la gráfica de la figura I.35 se ha colocado una carga resistiva cuyo valor como se puede apreciar en el **Bloque** es de $4,17 \text{ ohm}$, las gráficas tanto de voltajes como de corrientes se observan en las figuras I.36 y I.37 respectivamente. En donde se ha colocado como voltaje de entrada un voltaje igual a $V_H = 240 \text{ v}$.

Figura I.35 Conexión como autotransformador reductor en SIMULINK.

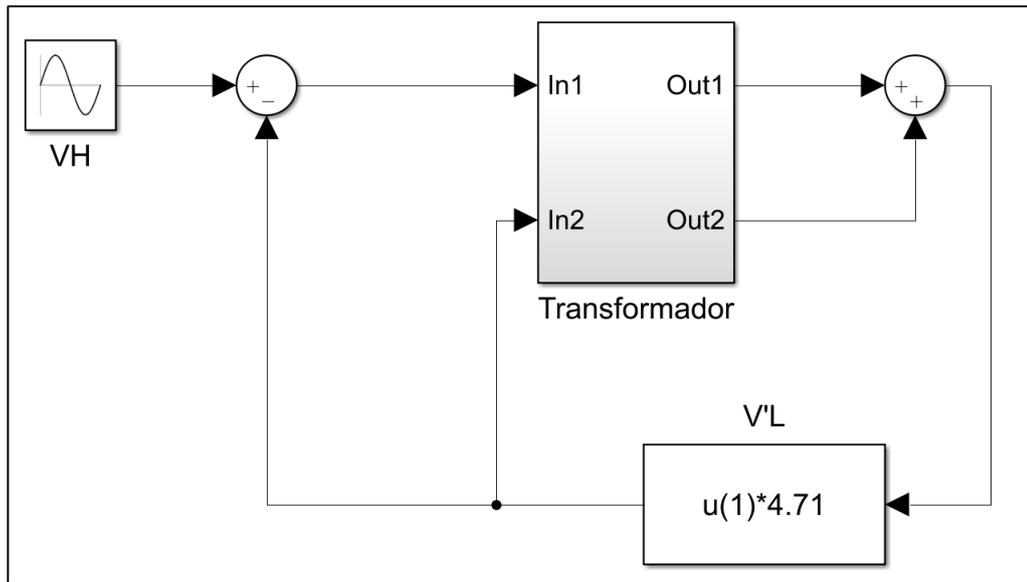
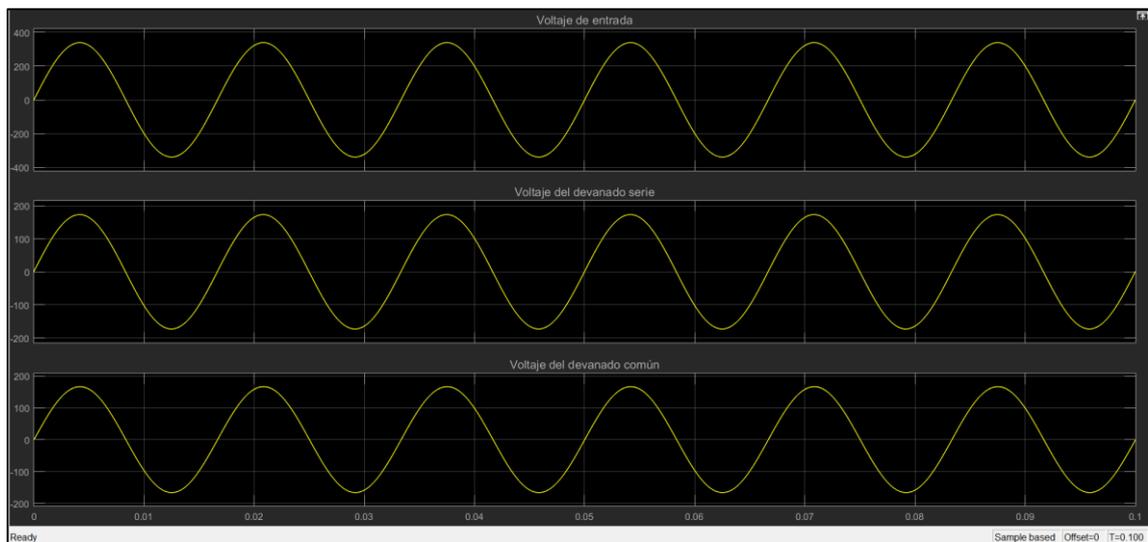


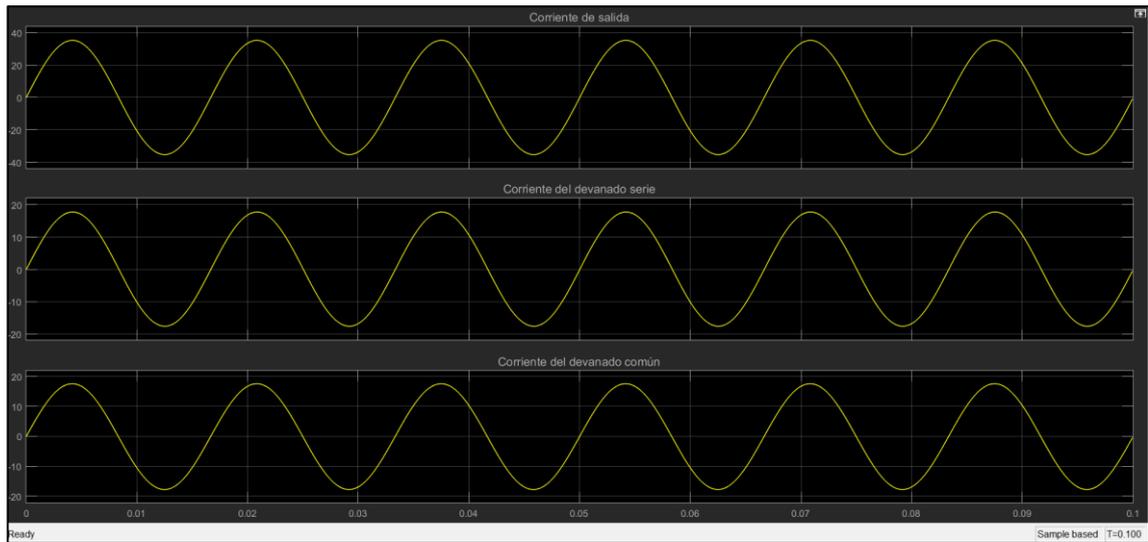
Figura I.36 Voltajes de entrada y salida de los devanados del autotransformador reductor.



Se debe tener en cuenta que el voltaje secundario y de salida obtenido están referidos al lado primario del transformador, si se desea obtener los valores reales solamente se debe agregar un bloque **GAIN** y ubicar la relación de transformación del transformador.

De igual modo sucede con las corrientes. Si se desea encontrar sus valores reales solamente se debe multiplicar por la relación de transformación de las corrientes de un transformador común.

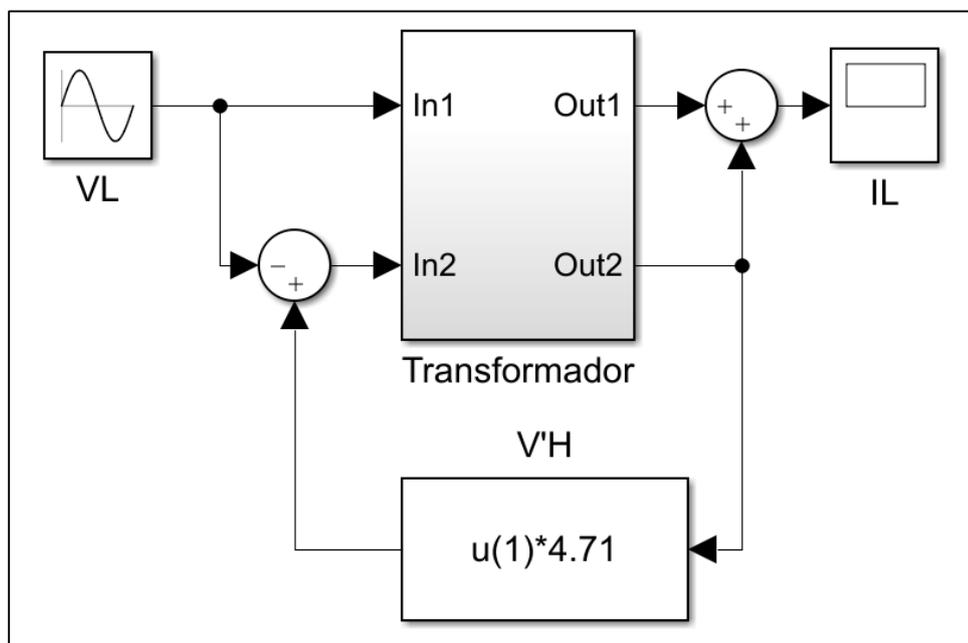
Figura I.37 Corrientes de entrada y salida de los devanados del autotransformador reductor.



1.7.2. Conexión como autotransformador elevador

Para conectar el transformador como autotransformador elevador, se sigue las mismas reglas aplicadas en el autotransformador reductor, al realizarlo se obtiene el esquema que se aprecia en la figura I.38.

Figura I.38 Conexión como autotransformador elevador en SIMULINK.



II. GUIA PRÁCTICA

2.1. Caída de voltaje en un transformador real sin saturación

Objetivo General

Analizar el comportamiento de las ondas de voltaje en un transformador real no saturado para conocer la variación de voltaje que se tiene tanto en vacío como en carga.

Objetivo Especifico

- Conocer a que se debe la caída de voltaje en un transformador.
- Saber determinar la eficiencia de un transformador a partir de su regulación de voltaje.
- Estudiar el efecto de una carga capacitiva en la regulación de voltaje.

Trabajo preparatorio

En lo referente a la caída de voltaje interna del transformador se recomienda la información que se puede obtener en las bibliografías [6] pág. 58-63, [5] pág. 77-83, [7] pág. 195-200, [8] pág 211-212. Para conocer el efecto de la carga capacitiva en el transformador es recomendable revisar los siguientes documentos [6] pág. 45-46 [9] 14-17.

Guía de desarrollo

Desarrollo

Abra el archivo Simulink **Transformador.slx** y simule el transformador en vacío. A continuación simule el transformador con carga resistiva elevando su valor desde 0ohm hasta 100ohm y describa lo que sucede. Después grafique las ondas de voltaje primario y secundario tanto en vacío como en carga a 100ohm .

Calcule la regulación de voltaje con los diferentes tipos de carga y de una breve descripción de lo que sucede a medida que aumenta la carga en el transformador.

Coloque una carga capacitiva en el secundario del transformador de $50\mu F$ y mire el cambio que se da en el voltaje secundario y calcule la regulación de la misma.

Cuadro de resultados

Caída de voltaje en un transformador		
Resistencia	Magnitud v_1 RMS (v)	Magnitud v'_2 RMS (v)
0	120	0
9.6	120	115.4
40	120	118.9
50	120	119.1
60	120	119.2
80	120	119.4
100	120	119.5

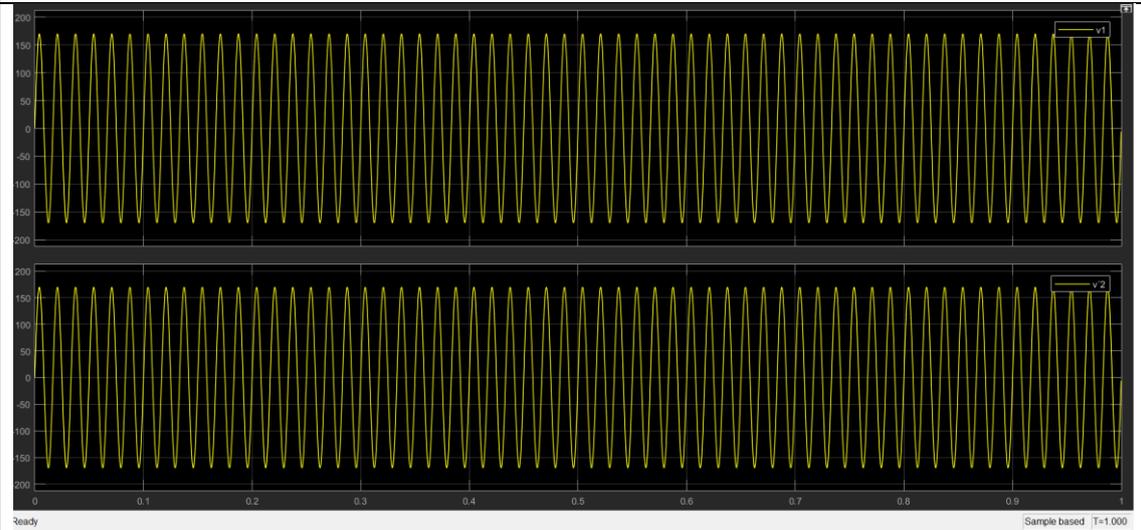
Descripción: A medida que la carga resistiva en el transformador aumenta el voltaje secundario también aumenta, es decir la carga es directamente proporcional a la ganancia de voltaje secundario, por otro lado cuando no se tiene carga en el secundario el voltaje cae a cero.

Regulación de voltaje en un transformador	
Resistencia R'	Regulación %
0	100
9.6	3.83
40	0.917
50	0.75
60	0.667
80	0.5
100	0.417

Descripción: La regulación de voltaje disminuye a medida que aumenta la carga resistiva, es decir cuando el voltaje en carga está cerca al voltaje en vacío, por lo tanto una regulación baja quiere decir que el rendimiento del transformador es alto.

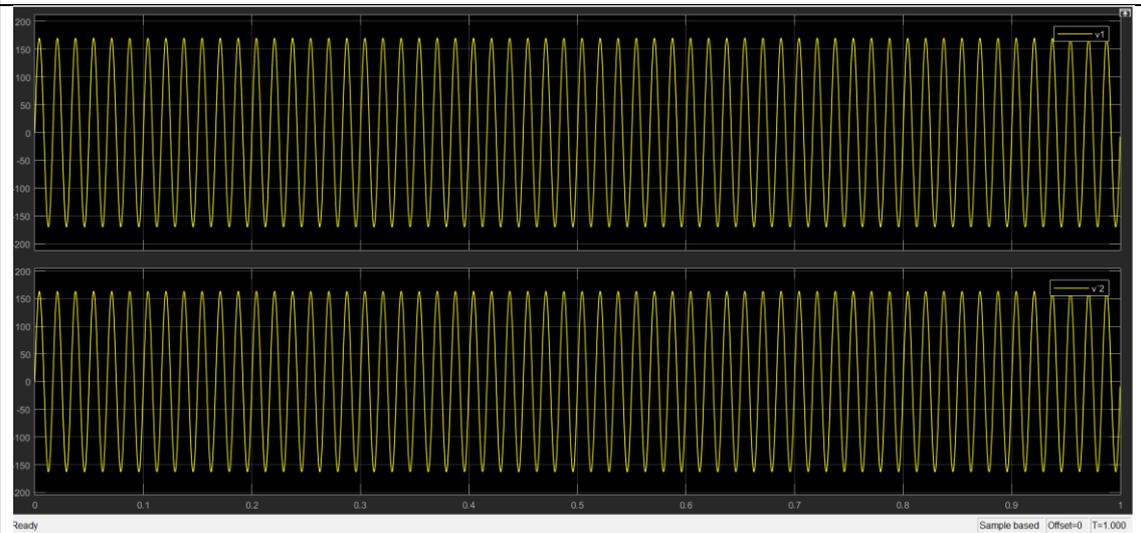
Gráficas de voltaje

Voltajes sin carga



Descripción:

Voltajes con carga con $R'=100\ \text{ohm}$



Descripción:

Transformador con carga capacitiva		
Capacitor (uF)	Magnitud v'_2 RMS (v)	Regulación %
50	120.2	-1.67e-3

Descripción: Se observa que la regulación de voltaje es negativa, debido a que el voltaje secundario con carga es mucho mayor que el voltaje en vacío, este fenómeno es conocido como efecto Ferranti.

Informe de la práctica

El informe de la práctica debe tener los siguientes parámetros

- Objetivos
- Resumen de lo aprendido
- Análisis de Resultados
- Conclusiones y Recomendaciones

2.2. Corriente inrush en un transformador real sin saturación

Objetivo General

Estudiar el comportamiento de las ondas de corriente en un transformador real no saturado para conocer cómo se produce la corriente inrush y como mitigarlo.

Objetivo Especifico

- Analizar la variación de la corriente inrush con el transformador en vacío.
- Analizar la variación de la corriente inrush con el transformador funcionando en carga.
- Conocer el efecto de la corriente inrush cuando el transformador está en cortocircuito.

Trabajo preparatorio

Para el estudio de la corriente inrush es recomendable analizar los siguientes papers [10], [11] y [12], además de los siguientes libros de texto [7] pág. 203-204, [13] pág. 61-66.

Guía de desarrollo

Desarrollo

Abra el archivo Simulink **Transformador.slx** ubicado en la carpeta **Proyecto**, después para agregar la corriente inrush sin saturación abra el archivo **Elementos.slx** ubicado en la misma carpeta y agregue el sub-sistema denominado **Inrush no saturado** al diagrama **Transformador.slx**.

Una vez conectado el bloque inrush grafique la onda de corriente primaria sin carga para $t = 30$ segundos y explique la forma de la misma. Después varié el valor de la resistencia interna r_1 de 0.25 ohm a 3 ohm y escriba el valor de la corriente primaria RMS para $t = 30$ segundos y mire cómo ha cambiado la onda de corriente primaria.

Una vez que se ha analizado el transformador en vacío, conéctese una carga resistiva y varié la misma desde una $R' = 0$ hasta $R' = 100$ ohms, con una resistencia interna de $r_1 = 0.25$ ohm y escriba los valores de corriente i_1 e i_2 RMS para $t = 30$ y realice una breve descripción de lo visto y una descripción cuando el transformador trabaja en cortocircuito es decir cuando $R' = 0$.

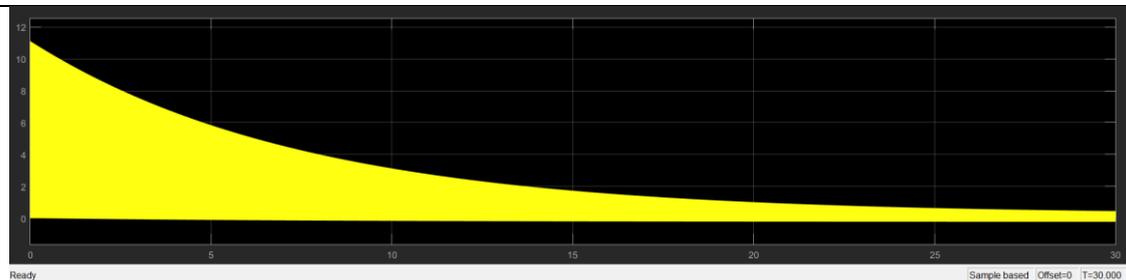
Cuadro de resultado

Valor de resistencia r_1 (ohm)	Valor de corriente i_1 (A) RMS para t=30 s
0.25	0.2602
0.5	0.1706
1	0.1693
1.5	0.1693
2	0.1693
2.5	0.1693
3	0.1693

Descripción: La corriente RMS a medida que aumenta el valor de la resistencia disminuye hasta mantenerse en un valor constante a pesar de que se aumente mucho más la resistencia primaria.

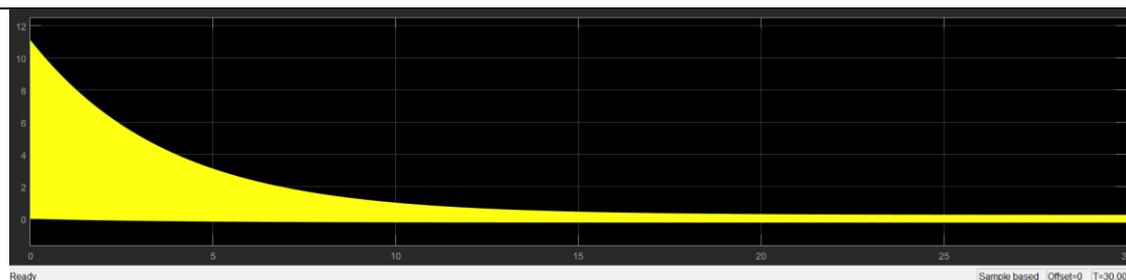
Corriente Inrush para diferentes valores de r_1

$r_1 = 0.25$

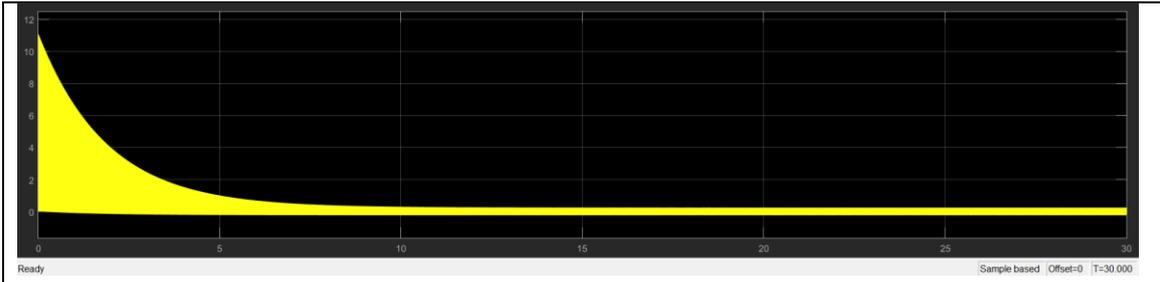


Descripción: La onda de corriente tiene una componente exponencial la cual hace que la corriente primaria sea elevada los primeros segundos, como se ve en la figura, la componente exponencial puede reducirse a medida que se incrementa el valor de la resistencia interna del transformador del devanado primario.

$r_1 = 0.5$



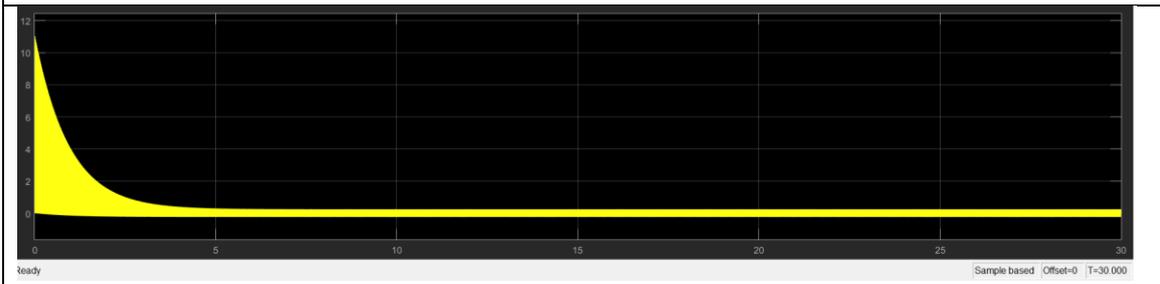
$r_1 = 1$



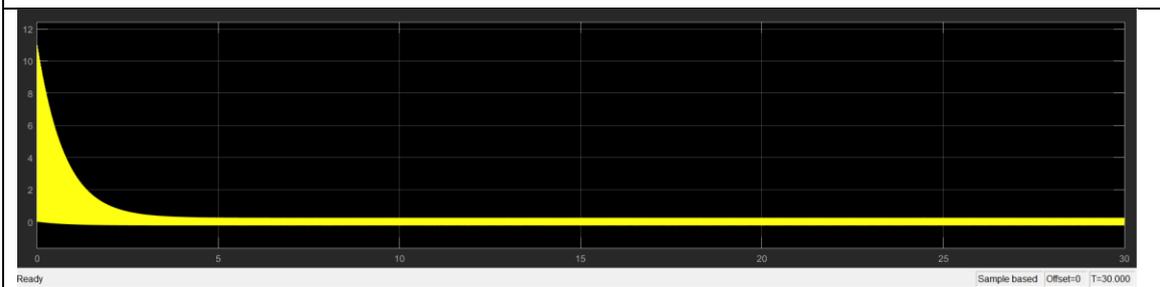
$$r_1 = 1.5$$



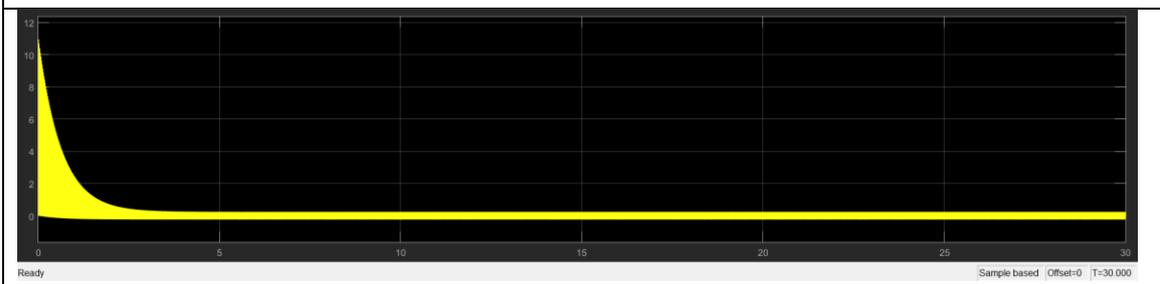
$$r_1 = 2$$



$$r_1 = 2.5$$



$$r_1 = 3$$



Corriente inrush en un transformador con carga		
Resistencia de carga R'	Corriente i_1 RMS	Corriente i'_2 RMS
0	423.4	423.4
9.6	16.97	16.96
40	4.202	4.194
50	3.372	3.361
60	2.817	2.805
80	2.123	2.107
100	1.707	1.687

Descripción: Se observa que en cuando el transformador esta en carga resistiva a medida que esta aumenta el valor RMS de las corrientes disminuye.

Descripción: Cuando el transformador trabaja en cortocircuito la corriente tanto primaria como secundaria tiene valores elevados, si el transformador sufriera un cortocircuito en los primeros ciclos, debido a la corriente inrush este sufrirá daños severos en su devanado tanto primario como secundario.

Informe de la práctica

El informe de la práctica debe tener los siguientes parámetros

- Objetivos
- Resumen de lo aprendido
- Análisis de Resultados
- Conclusiones y Recomendaciones

2.3. Transformador real con carga inductiva resistiva saturado

Objetivo General

Analizar las corrientes primaria y secundaria de un transformador real saturado con carga Inductiva-Resistiva para conocer su comportamiento.

Objetivos Específicos

- Estudiar la forma de onda de la corriente primaria
- Obtener las componentes armónicas de la corriente primaria.
- Comprender el fenómeno que se presenta cuando el transformador está saturado.

Trabajo Preparatorio

Para este caso es recomendable leer las siguientes bibliografías [7] pág. 35-39, [14] pág. 54-59, [5] pág. 16-22, [15] pág. 28-34, [16] pág. 20-25, [17] pág. 190-209.

Guía de desarrollo

Desarrollo

Para el desarrollo de esta práctica se debe agregar el bloque **Saturación** a nuestro esquema, esto lo realizamos abriendo el archivo **Transformador.slx** ubicado en la carpeta proyectos, después para añadir el bloque saturación abrimos el archivo **Elementos.slx** que se encuentra en la misma carpeta. Una vez en el archivo **Elementos.slx** seleccionamos el bloque denominado **Saturación** y lo añadimos al transformador de **Transformador.slx**.

Para obtener datos que asemejen a un transformador real colocamos los siguientes datos en el bloque **Saturación** que se pueden apreciar en la figura II.1 y II.2.

Figura II.1 Saturación en el núcleo

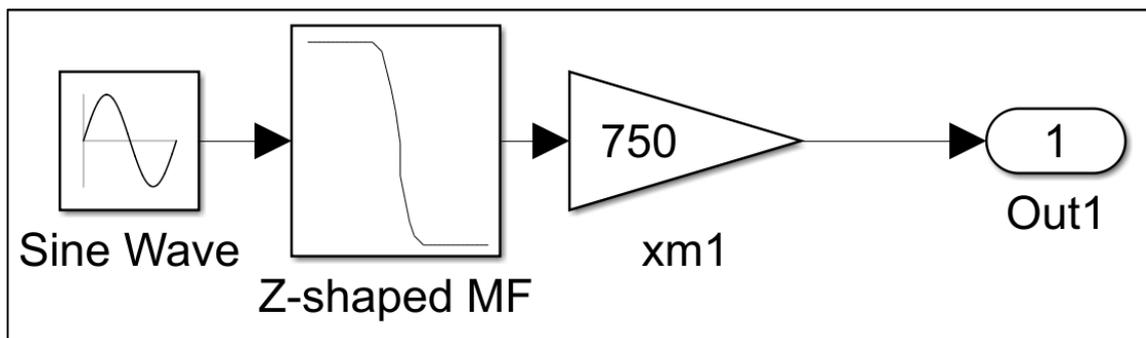
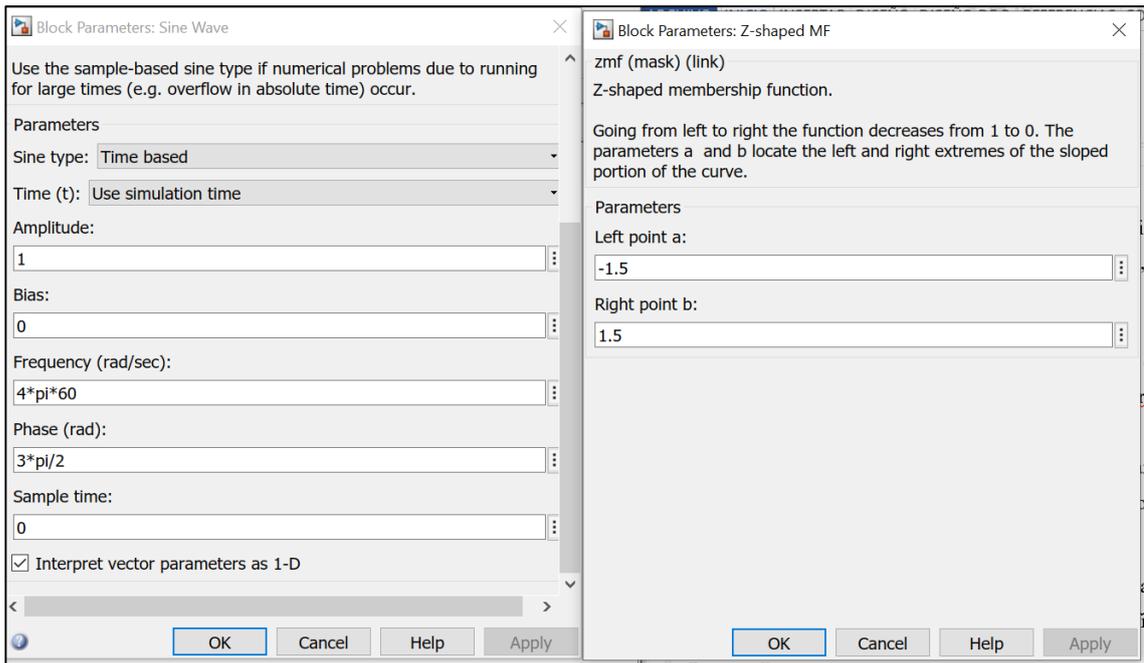


Figura II.2 Datos para la saturación del transformador

Para incorporar la carga inductiva resistiva en el mismo archivo **Elementos.slx** se encuentra un bloque llamado **Carga Inductiva-Resistiva** que será agregado al diagrama denominado **Transformador.slx** los datos de la carga inductiva resistiva se muestran en la tabla II.1.

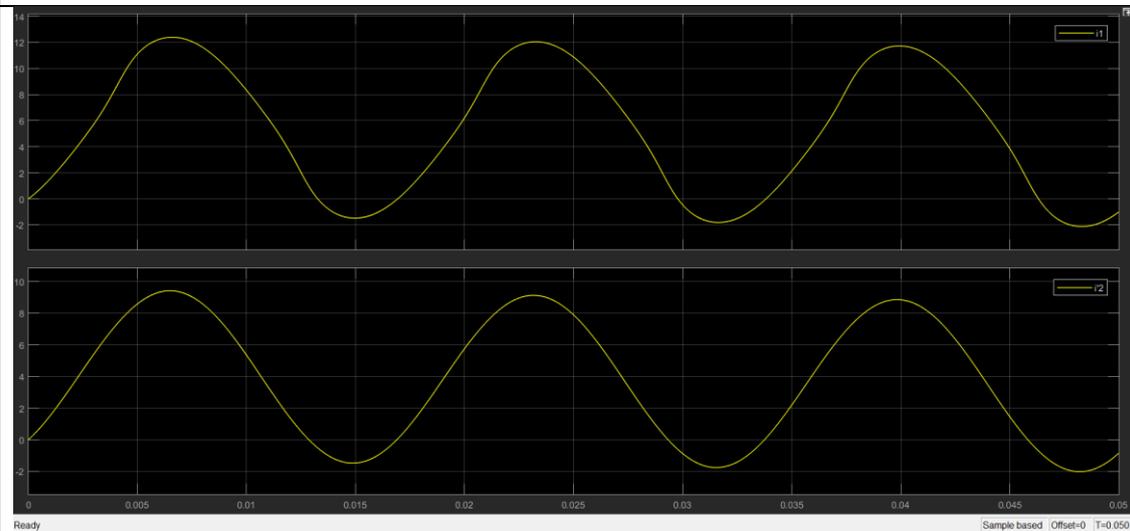
Tabla II.1

Datos	Cantidad
R'_L	50 ohm
x'_L	j40 ohm

Una vez realizado lo anteriormente mencionado grafique las curvas de corriente tanto primaria como secundaria para $t = 0.05$ segundos y explique por qué la forma de la corriente primaria no es completamente sinusoidal. Después obtenga las componentes armónicas de la corriente primaria y analice cual es la componente con mayor porcentaje y como esto afecta a la red eléctrica si se conectan varios bancos monofásicos como bancos trifásicos.

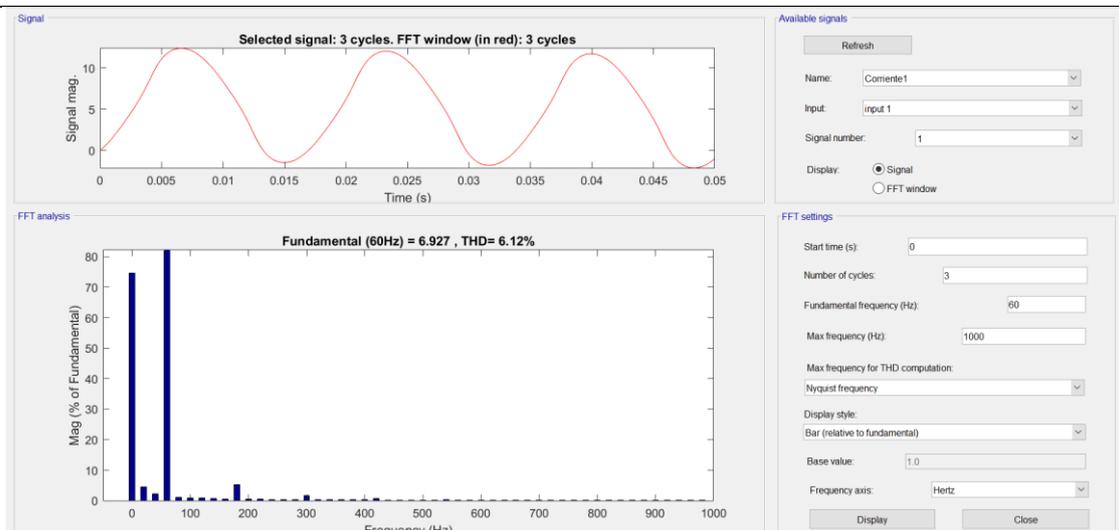
Cuadro de Resultados

Corrientes primaria y secundaria cuando el transformador trabaja con saturación



Descripción: La forma de la corriente primaria se debe a que la reactancia mutua del transformador no es lineal, ya que esta varía conforme varía la permeabilidad de la máquina, además se aprecia que la corriente es mucho más alta, esto debido a que se necesita mayor corriente para crear el flujo necesario para que funcione la máquina correctamente.

Armónicos de la corriente primaria del transformador



Descripción: El mayor porcentaje de armónicos se presenta en la componente DC con 74,70% y el tercer armónico con 5,34% de la frecuencia fundamental. Estas armónicas cuando se tiene un transformador trifásico a partir de bancos monofásicos, generarían una componente de tercer armónico que no se anula, más bien incrementa 3 veces haciendo que la onda de voltaje de la línea se distorciona, lo que conllevaría a pérdidas de energía.

Informe de la práctica

El informe de la práctica debe tener los siguientes parámetros

- Objetivos
- Resumen de lo aprendido
- Análisis de Resultados
- Conclusiones y Recomendaciones

III. BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. Mun, *Dynamic Simulation of Electric Machinery*, New Jersey: Prentice Hall PTR, 1998.
- [2] C. S. M. Alexander, *Fundamentos de circuitos eléctricos*, México: Mc Graw Hill, 2006.
- [3] G. Biorci, *FONDAMENTI DI TEORIA DEI CIRCUITI*, New York: McGraw-Hill, 1995.
- [4] J. Edminister, *TEORIA Y PROBLEMAS DE CIRCUITOS ELECTRICOS*, México: Schaum-McGraw-Hill, 1965.
- [5] S. Chapman, *Máquinas Eléctricas*, México: Mc Graw Hill, 2012.
- [6] G. Smarajit, *Electrical Machines*, Baba Barkha: Pearsosn Education , 2007.
- [7] F. Mora, *Máquinas eléctricas*, Aravaca: Mc Graw Hill, 2003.
- [8] T. Wildi, *Máquinas Eléctricas y Sistemas de Potencia*, 2007: Pearson Educación, México.
- [9] G. Demurtas, *Dispense di Macchine elettriche*, Italy: Monserrato (CA), 2007.
- [10] Y. Song, H. Jia, X. Xu y L. Yu, «ResearchGate,» 29 Abril 2017. [En línea]. Available: https://www.researchgate.net/publication/318692720_Simulation_analysis_of_inrush_current_of_three_phase_transformer_based_on_MATLAB/references. [Último acceso: 29 Mayo 2019].
- [11] O. Ozgonenel y A. Caner, «RG,» 12 Diciembre 2013. [En línea]. Available: https://www.researchgate.net/publication/242776169_A_STUDY_ON_MAGNETIZING_INRUSH_CURRENT_OF_DIFFERENT_CORE_MATERIALS. [Último acceso: 22 Abril 2019].
- [12] O. Youssef, «A Wavelet-Based Techique for Discrimination Between Faults and Magnetizing Inrush Current in Transformers,» *IEEE TRANSACTIONS ON POWER DELIVERY*, vol. 18, n° 176, pp. 170-, 2003.

- [13] A. Daniels, INTRODUCTION TO ELECTRICAL MACHINES, London: MACMILLAN PUBLISHERS LTD, 1976.
- [14] M. El-Hawary, Principles of Electric Machines With Power Electronic Applications, New York: IEEE Press Series on Power Engineering, 2002.
- [15] C. McLyman, Transformer and Inductor desing Handbook, Idyllwild: Marcel Dekker, 2004.
- [16] M. Scarpiniti, Principi di Macchine Elettriche, Roma: Università di Roma "La Sapienza", 2014.
- [17] G. Basile, CALCOLO DELLE MACHINE ELETTRICHE, Milan: Casa Editrice Ambrosiana, 1969.

IV. RESUMEN EJECUTIVO

El motivo por el cual surge la idea misma de representar un transformador eléctrico en modelos matemáticos, nace de la idea de investigación y concepción de los principales aspectos que gobiernan el funcionamiento de la máquina misma. Desde los inicios mismos de la ingeniería eléctrica muchos fenómenos solamente se llegaron a conocer después haber diseñado grandes redes eléctricas para finalmente descubrir que tales modelos o eran sobredimensionados o carecía de criterio de cálculo. Un fenómeno en particular conocido como efecto Ferranti solamente se llegó a conocer después de haber diseñado una gran red de transmisión. Si en aquella época se hubiese dispuesto de formas rápidas de cálculo o softwares que facilitaran el cálculo se sabría que el efecto capacitivo tiene efectos en los transformadores.

Todo diseño en la actualidad necesita tener todas las prevenciones necesarias para llevarlo a cabo, tomando en cuenta lo último es necesario conocer los efectos que se podrían o pueden suceder en un transformador antes de diseñar grandes redes. El diseño de esta máquina facilita los cálculos de una manera amplia y precisa tomando en cuenta que también se lo realizo para aquellos estudiantes que se encuentran iniciando en el fascinante mundo de las máquinas eléctricas, para que despejen sus dudas lleven a cabo experimentos y se sumerjan en el conocimiento para en un futuro tener ideas claras y concisas del funcionamiento del transformador eléctrico.

En dicho modelo matemático del transformador se pueden obtener datos cercanos a los de un transformador real ya que se lo comparo con un transformador $Y-Y$ que se encuentra en la librería Simulink en Matlab, los datos que se obtuvieron son similares demostrando así su eficacia a la hora de realizar cálculos sobre máquinas eléctricas.