



**UNIVERSIDAD TÉCNICA DE COTOPAXI**  
**FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA Y APLICADAS**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE**  
**POTENCIA**

**PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

**MODELO MATEMÁTICO DE APROXIMACIÓN CUADRÁTICO PARA EL  
FLUJO ÓPTIMO DE POTENCIA EN REDES ELÉCTRICAS DE DISTRIBUCIÓN  
TRIFÁSICOS DESBALANCEADOS**

“Proyecto de Titulación presentado previo a la obtención del Título de Ingenieros Eléctricos  
en Sistemas Eléctricos de Potencia”

**Autores:**

Avilés Ilaquiche Alex Fabián

Ramos Borja Yessenia Elizabeth

**Tutor Académico:**

Ing. Quinatoa Caiza Carlos Iván MSc.

**LITACUNGA – ECUADOR**

**2021**

## DECLARACIÓN DE AUTORÍA

Nosotros **AVILES ILAQUICHE ALEX FABIAN** y **RAMOS BORJA YESSENIA ELIZABETH** declaramos ser autores del presente proyecto de investigación: “**MODELO MATEMÁTICO DE APROXIMACIÓN CUADRÁTICO PARA EL FLUJO ÓPTIMO DE POTENCIA EN REDES ELÉCTRICAS DE DISTRIBUCIÓN TRIFÁSICOS DESBALANCEADOS**”, siendo el Ing. **QUINATO CAIZA CARLOS IVAN** el tutor del presente trabajo; y eximo expresamente a la Universidad Técnica de Cotopaxi y a sus representantes legales de posibles reclamos o acciones legales.

Además, certifico que las ideas, conceptos, procedimientos y resultados vertidos en el presente trabajo investigativo, son de nuestra exclusiva responsabilidad.

.....  
**Avilés Ilaquiche Alex Fabián**  
**C.C. 050376301-3**

.....  
**Ramos Borja Yessenia Elizabeth**  
**C.C. 150122467-7**

## AVAL DEL TUTOR DE PROYECTO DE TITULACIÓN

En calidad de Tutor del Trabajo de Investigación sobre el título:

**“MODELO MATEMÁTICO DE APROXIMACIÓN CUADRÁTICO PARA EL FLUJO ÓPTIMO DE POTENCIA EN REDES ELÉCTRICAS DE DISTRIBUCIÓN TRIFÁSICOS DESBALANCEADOS”**, de **AVILES ILAQUICHE ALEX FABIAN** y **RAMOS BORJA YESSSENIA ELIZABETH**, de la carrera de Ingeniería Eléctrica, considero que dicho Informe Investigativo cumple con los requerimientos metodológicos y aportes científico-técnicos suficientes para ser sometidos a la evaluación del Tribunal de Validación de Proyecto que el Honorable Consejo Académico de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería y Aplicadas de la Universidad Técnica de Cotopaxi designe, para su correspondiente estudio y calificación.

Latacunga, agosto 2021

El Tutor

.....  
**Ing. MSc. Quinatoa Caiza Carlos Iván**  
**C.C. 172750251-8**

## APROBACIÓN DEL TRIBUNAL DE TITULACIÓN

En calidad de Tribunal de Lectores, aprueban la presente Informe de investigación de acuerdo a las disposiciones reglamentarias emitidas por la Universidad Técnica de Cotopaxi, y por la Facultad de Ciencias de la Ingeniería y Aplicadas; por cuanto, los postulantes **AVILES ILAQUICHE ALEX FABIAN** y **RAMOS BORJA YESSSENIA ELIZABETH** con el título de Proyecto de titulación “**MODELO MATEMÁTICO DE APROXIMACIÓN CUADRÁTICO PARA EL FLUJO ÓPTIMO DE POTENCIA EN REDES ELÉCTRICAS DE DISTRIBUCIÓN TRIFÁSICOS DESBALANCEADOS**”, han considerado las recomendaciones emitidas oportunamente y reúne los méritos suficientes para ser sometido al acto de Sustentación de Proyecto.

Por lo antes expuesto, se autoriza realizar los empastados correspondientes, según la normativa institucional.

Latacunga, agosto 2021

Para constancia firman:

.....  
**Ing. MSc. Jiménez Jiménez Diego**  
**Leonardo**  
**C.C. 050349370-2**

.....  
**Ing. MSc. Guamán Cuenca Wilian Patricio**  
**C.C. 060357895-6**

.....  
**Ing. MSc. Castillo Fiallos Jessica Nataly**  
**C.C. 060459021-6**

## AGRADECIMIENTO

En primer lugar, agradecido con Dios, por el don la vida por permitirnos llegar hasta esta etapa de vida universitaria.

A mi familia por motivarme cada día a seguir luchando, por sus palabras de ánimos y por su total apoyo gracias.

A mis amigos que siempre estuvieron apoyándome en cada etapa de mi vida universitaria, quienes estaban en todo momento presto a darnos una mano para salir adelante.

Al Ing. Carlos Quinatoa, quien más que un tutor fue nuestro amigo, siempre presto a compartir con nosotros sus valiosos conocimientos en el desarrollo del presente trabajo de investigación.

A ese amigo que es más cercano que un hermano, que está en los momentos más difíciles de la vida, ese amigo que cuando todo está gris llegara con sus sabias palabras, a ti Ing. Xavier Pila, gracias por siempre estar al pendiente.

A mi compañera de tesis Yessenia Ramos, quien con su granito de arena fortalecimos conocimientos para llegar al mismo fin.

A la Universidad Técnica de Cotopaxi por abrir sus puertas para formarnos como profesionales. A los docentes de la carrera de Ingeniería Eléctrica, gracias por impartir sus valiosos conocimientos.

¡A todos, millón gracias!

**Fabián Avilés**

## AGRADECIMIENTO

Al finalizar este trabajo investigativo quiero utilizar este espacio para agradecer en primer lugar a Dios, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y permitirme culminar esta etapa de vida universitaria.

Agradecer hoy y siempre a mi familia que siempre se han preocupado por mi bienestar y que si no fuese por el esfuerzo y motivación de cada uno de ellos mis estudios no hubiesen sido posibles.

A nuestros compañeros ya que con ellos vivimos los buenos y malos momentos que solo se viven en la universidad y que con algunos más que compañeros somos verdaderamente amigos; y en especial a mi compañero de tesis por su amistad y apoyo diario.

Mi gratitud también para la Universidad Técnica de Cotopaxi la cual me abrió las puertas para ser mejor persona y formarme como una profesional de la Carrera de Ingeniería Eléctrica, mi agradecimiento sincero al Ing. Carlos Quinatoa tutor de nuestra tesis, y a cada uno de los docentes que, con su sabiduría, conocimiento y apoyo, me motivaron a desarrollarme como profesional.

Y a todos quienes contribuyeron con un granito de arena para culminar con éxito esta meta propuesta.

**Yessenia Ramos**

## DEDICATORIA

A mi Dios fuente de sabiduría, por ser mi magnifico instructor quien mediante sus enseñanzas me ayudo a soportar desafíos y obstáculos que se presentaron en el transcurso de mi vida universitaria.

A mis padres Jorge Avilés y Marina Ilaquiche, quienes fueron el pilar fundamental para ser la persona que soy, gracias por sus consejos, cariño y sobre todo por darme la oportunidad de ser alguien en la vida.

A mis abuelitos paternos Carlos y Rita, como también a mis abuelitos maternos Pedro y María.

A mis hermanos, Klever, Blanca, Diego, Jorge y Verónica, como también a mis cuñados Ángel, Sandra y Gabriela por siempre estar al pendiente de mí, y apoyando incondicionalmente.

A mis sobrinos Walter, Dennis, Fransua, Mateo, Andy, Abraham, Mikaela, Asher y Sebastián.

*“Constancia, esfuerzo, y humildad son la clave para la superación”*

**Fabián Avilés**

## DEDICATORIA

El presente trabajo investigativo lo dedico en primer lugar a Dios por darme salud y vida durante estos años permitiéndome así cumplir con mi meta anhelada de terminar mis estudios universitarios llegando a ser un buen profesional.

A mi madre Elizabeth Borja por su amor, trabajo y sacrificio que ha realizado en todos estos años, gracias a ello he logrado llegar hasta aquí y convertirme en todo lo que ahora soy. Gracias padres por ser los principales promotores de mis sueños por confiar y creer en mis expectativas, por los consejos, valores y principios que me han inculcado.

A mis hermanos Ivone y Michael Quispe por estar siempre presentes, acompañándome y apoyándome moralmente, a lo largo de esta etapa de mi vida. Ojalá algún día yo me convierta en esa fuerza y motivación para que puedan seguir avanzando en su camino.

A mi abuelita “mi eterna mamita María” quien me enseñó que incluso la tarea más grande se puede lograr si se hace un paso a la vez.

A ti Fabricio que te quiero y admiro mucho porque me haz enseñado a siempre buscar una solución a los problemas y por ser un gran apoyo en mi vida.

Y todas las personas que me han apoyado y han hecho que el trabajo se realice con éxito en especial a aquellos que me abrieron las puertas y compartieron sus conocimientos.

Sin más este esfuerzo está dedicado a mi familia y seres queridos que han sido mi motor y mi mayor inspiración.

*¡Lo logramos mami!*

**Yessenia Ramos**



## RESUMEN

Uno de los problemas más recurrentes en el cálculo de Flujos Óptimos de Potencia es que presentan fallas en la convergencia en los sistemas de distribución debido a las no linealidades que existen en el balance de potencia activa y reactiva, estos tipos de sistemas requieren que exista una única solución, y con ello realizar la coordinación de operación óptima de los recursos energéticos como son las energías no renovables. El presente trabajo investigativo tiene la finalidad de encontrar un modelo matemático mediante el uso de una aproximación cuadrática convexa que permita dar soluciones al flujo óptimo de potencia (OPF), para los sistemas de distribución, considerando generación distribuida. El enfoque se basa en un flujo óptimo de potencia linealizado que sea válido para sistemas de distribución que incluyan a los sistemas desbalanceados trifásicos. El modelo matemático parte desde la modelación de carga estática polinomial ZIP, luego se determina si la función es no holomorfa para poder linealizar mediante las series de Taylor en el plano complejo y así transformar en una función lineal. Mediante la función CVX y el solver SeDuMi del software Matlab, se realizó la optimización del flujo óptimo de potencia trifásico desbalanceado, obteniendo el óptimo global y una única solución, donde el objetivo es minimizar las pérdidas totales del sistema mediante generadores distribuidos que se consideran en el sistema. Los resultados obtenidos del modelo matemático presentado en el presente trabajo investigativo, se compararon con un software comercial Cymdist, ya que es enfocado a sistemas de distribución desbalanceados y consta con los parámetros de carga polinomial para su modelado.

**Palabras clave:** Aproximación cuadrática convexa, flujo óptimo de potencia, generación distribuida, trifásico, sistemas desbalanceados.

## ABSTRACT

### THEME:

“MATHEMATICAL QUADRATIC APPROXIMATION MODEL FOR OPTIMAL POWER FLOW IN UNBALANCED THREE-PHASE DISTRIBUTION POWER GRIDS”

### Authors:

Avilés Ilaquiche Alex Fabián

Ramos Borja Yessenia Elizabeth

One of the most recurrent problems in the calculation of Optimal Power Flows is that they present failures in the convergence in the distribution systems due to the nonlinearities that exist in the balance of active and reactive power, these types of systems require that there is only one solution, and with it, the coordination of optimal operation of energy resources such as non-renewable energies. The purpose of this research work is to find a mathematical model through the use of a convex quadratic approximation that allows giving solutions to the optimal power flow (OPF) for distribution systems, considering distributed generation. The approach is based on a linearized optimal power flow that is valid for distribution systems including three-phase unbalanced systems. The mathematical model starts from the ZIP polynomial static load modeling, then it is determined if the function is not holomorphic in order to linearize by means of Taylor series in the complex plane and thus transform it into a linear function. By means of the CVX function and the SeDuMi solver of the Matlab software, the optimization of the optimal unbalanced three-phase power flow was performed, obtaining the global optimum and a single solution, where the objective is to minimize the total losses of the system by means of distributed generators considered in the system. The results obtained from the mathematical model presented in this research work were compared with a commercial software Cymdist, since it is focused on unbalanced distribution systems and has the polynomial load parameters for its modeling.

**Keywords:** Convex quadratic approximation, optimal power flow, distributed generation, multiphase, unbalanced systems.



CENTRO DE IDIOMAS

## *AVAL DE TRADUCCIÓN*

## ÍNDICE DE CONTENIDO

1.	INFORMACIÓN GENERAL.....	1
2.	INTRODUCCIÓN .....	2
2.1.	El problema:.....	2
2.1.1.	Situación Problemática: .....	2
2.1.2.	Formulación del problema: .....	2
2.2.	OBJETO Y CAMPO DE ACCION .....	2
2.3.	Beneficiarios: .....	3
2.3.1.	Beneficiarios directos .....	3
2.3.2.	Beneficiarios indirectos .....	3
2.4.	Justificación: .....	3
2.5.	Hipótesis .....	4
2.6.	Objetivos:.....	4
2.6.1.	General:.....	4
2.6.2.	Específicos:.....	4
2.7.	Sistema de tareas con relación a los objetivos planteados.....	5
3.	FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA .....	6
3.1.	Antecedentes.....	6
3.2.	Sistema eléctrico de potencia (sep).....	7
3.2.1.	Sistemas eléctricos trifásicos desbalanceados .....	8
3.3.	Características generales de los sistemas de distribución .....	9
3.3.1.	Topología de la red .....	10
3.3.2.	Elementos que forman la red de distribución .....	10
3.4.	Modelado de los elementos del sistema.....	11
3.4.1.	Modelado del generador .....	11
3.4.2.	Modelado del transformador de potencia .....	12
3.4.3.	Modelado de las líneas de transmisión .....	14

3.4.4.	Modelado de las cargas concentradas.....	16
3.4.5.	Formulación de la matriz de admitancias (abc) nodal del sistema .....	17
3.5.	Flujos de potencia en redes de distribución .....	18
3.5.1.	Modelo matemático para el estudio de flujo.....	19
3.5.2.	Método de solución mediante Newton Raphson .....	20
3.5.3.	Método de solución de Gauss, mediante inversión parcial Y nodal .....	22
3.5.4.	Método de solución mediante corriente nodales.....	23
3.6.	Flujo óptimo de potencia .....	26
3.6.1.	Función objetiva .....	26
3.6.2.	Variables de decisión.....	28
3.6.3.	Restricciones.....	29
3.7.	Series de Taylor.....	30
3.7.1.	Series de Taylor en el plano complejo.....	30
3.7.2.	Series de Taylor para funciones holomorfas.....	31
3.7.3.	Propiedades de las series de Taylor .....	31
3.8.	Condiciones de Cauchy Riemann .....	32
3.9.	Modelo ZIP.....	33
3.10.	Modelo Polinomial.....	35
3.11.	Cvx Matlab.....	36
3.12.	SEDUMI.....	36
3.13.	CYME.....	37
3.13.1.	Cymdist.....	37
4.	MATERIALES Y MÉTODOS .....	38
4.1.	MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN.....	38
4.2.	Modelo matemático para el OPF no lineal .....	38
4.3.	Aproximación cuadrática al flujo de carga óptimo en sistemas de distribución .....	41
4.4.	SERIE DE TAYLOR PARA FUNCIONES NO HOLOMORFAS .....	43

4.5.	Modelo cuadrático linealizado.....	44
4.6.	Extensión para el modelo cuadrático trifásico desbalanceado.....	47
4.7.	Función objetivo .....	49
4.8.	Diagrama de flujos.....	51
5.	ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS .....	53
5.1.	COMPARACIÓN DEL MÉTODO UTILIZANDO EL SISTEMAS DE PRUEBAS DE LA IEEE 13 NODOS.....	53
5.1.1.	Escenario 1: Caso Base sin Generación Distribuida.....	53
5.1.2.	Escenario 2: Ubicación de Generación Distribuida.....	56
5.2.	COMPARACIÓN DEL MÉTODO UTILIZANDO EL SISTEMAS DE PRUEBAS DE LA IEEE 37 NODOS.....	60
5.2.1.	Caso Base.....	60
5.2.2.	Escenario 1: Caso Base sin Generación Distribuida.....	61
5.2.3.	Escenario 2: Ubicación de Generación Distribuida.....	64
5.3.	COMPARACIÓN DEL MÉTODO UTILIZANDO EL SISTEMAS DE PRUEBAS DE LA IEEE 123 NODOS.....	67
5.3.1.	Escenario 1: Caso Base sin Generación Distribuida.....	67
5.3.2.	Escenario 2: Ubicación de Generación Distribuida.....	71
6.	CONCLUSIONES DEL PROYECTO .....	75
6.1.	CONCLUSIONES .....	75
6.2.	RECOMENDACIONES.....	76
7.	BIBLIOGRAFÍA .....	77
8.	ANEXOS .....	80

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 3.1.</b> Sistema Eléctrico de Potencia (SEP), se observa la generación, la transmisión y la distribución [6].	7
<b>Figura 3.2.</b> Sistema trifásico desbalanceado [6].	8
<b>Figura 3.3.</b> Sistema Eléctrico de Distribución [11].	10
<b>Figura 3.4.</b> Circuito equivalente del Generador [8].	11
<b>Figura 3.5.</b> Modelo del transformador [8].	12
<b>Figura 3.6.</b> Circuito equivalente trifásico Y-Y [7].	13
<b>Figura 3.7.</b> Modelo de línea para la configuración trifásica abc [8].	14
<b>Figura 3.8.</b> Modelo de la línea de transmisión [8].	15
<b>Figura 3.9.</b> Conexión estrella para carga trifásica [8].	16
<b>Figura 3.10.</b> Representación unifilar de un sistema trifásico [7].	17
<b>Figura 3.11.</b> Representación trifásica [7].	17
<b>Figura 3.12.</b> Interpretación geométrica del método de Newton Raphson [13].	20
<b>Figura 3.13.</b> Admitancia en serie [7].	21
<b>Figura 3.14.</b> Sistema eléctrico de cuatro nodos [7].	22
<b>Figura 3.15.</b> Esquema para dos nodos cualquiera m o n [15].	24
<b>Figura 3.16.</b> Barrido hacia arriba [14].	24
<b>Figura 3.17.</b> Barrido hacia abajo [14].	25
<b>Figura 3.18.</b> Curva de entrada/salida, características de la unidad generadora [16].	27
<b>Figura 4. 1.</b> Representación del error $\psi$ , al utilizar la aproximación lineal de V, en el plano complejo [29].	44
<b>Figura 4. 2.</b> Sistema de distribución trifásico con generación distribuida [4].	48
<b>Figura 4. 3.</b> Diagrama de flujo de la programación en Matlab.	52
<b>Figura 5. 1.</b> Esquema de pruebas del sistema de pruebas IEEE13 [30].	54
<b>Figura 5. 2.</b> Perfil de tensiones CVX.	55
<b>Figura 5. 3.</b> Perfil de tensiones CVX incluyendo GD.	59
<b>Figura 5. 4.</b> Esquema de pruebas del sistema de pruebas IEEE 37 [30].	61
<b>Figura 5. 5.</b> Perfil de tensiones CVX, caso IEEE 37 nodos.	63
<b>Figura 5. 6.</b> Perfil de tensiones en CVX inyectando GD.	66

<b>Figura 5. 7.</b> Esquema de pruebas del sistema de pruebas IEEE 123 [30]. .....	68
<b>Figura 5. 8.</b> Perfil de tensiones CVX.....	70
<b>Figura 5. 9.</b> Perfil tensiones CVX incluyendo GD.....	73



## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 5. 1.</b> Pérdidas totales del sistema de 13 nodos en kW. ....	54
<b>Tabla 5. 2.</b> Pérdidas totales del sistema de 13 nodos en por unidad (pu). ....	55
<b>Tabla 5. 3.</b> Voltaje máximos y mínimos caso base.....	56
<b>Tabla 5. 4.</b> Voltaje máximos y mínimos caso base.....	56
<b>Tabla 5. 5.</b> Pérdidas totales del sistema de 13 nodos en kW. ....	57
<b>Tabla 5. 6</b> Pérdidas totales del sistema de 13 nodos en por unidad (pu). ....	57
<b>Tabla 5. 7.</b> Datos de las potencias de generación distribuida en cada fase.....	58
<b>Tabla 5. 8.</b> Voltajes máximos y mínimos con generación distribuida.....	59
<b>Tabla 5. 9.</b> Voltajes máximos y mínimos con generación distribuida.....	60
<b>Tabla 5. 10.</b> Pérdidas totales del sistema de 37 nodos en kW. ....	62
<b>Tabla 5. 11.</b> Pérdidas totales del sistema de 37 nodos en por unidad (pu). ....	62
<b>Tabla 5. 12.</b> Voltaje máximos y mínimos caso base IEEE 37 nodos. ....	63
<b>Tabla 5. 13.</b> Voltaje máximos y mínimos caso base IEEE 37 nodos. ....	64
<b>Tabla 5. 14.</b> Pérdidas totales del sistema de 37 nodos en kW. ....	64
<b>Tabla 5. 15.</b> Pérdidas totales del sistema de 37 nodos en por unidad (pu). ....	65
<b>Tabla 5. 16.</b> Datos de las potencias de generación distribuida en cada fase.....	65
<b>Tabla 5. 17.</b> Voltaje máximos y mínimos con generación distribuida. ....	66
<b>Tabla 5. 18.</b> Voltaje máximos y mínimos con generación distribuida. ....	67
<b>Tabla 5. 19.</b> Pérdidas totales del sistema de 123 nodos en kW. ....	68
<b>Tabla 5. 20.</b> Pérdidas totales del sistema de 123 nodos en por unidad (pu). ....	69
<b>Tabla 5. 21.</b> Voltajes máximos y mínimos caso base. ....	70
<b>Tabla 5. 22.</b> Voltajes máximos y mínimos caso base. ....	71
<b>Tabla 5. 23.</b> Pérdidas totales del sistema de 123 nodos en kW. ....	71
<b>Tabla 5. 24.</b> Pérdidas totales del sistema de 123 nodos en por unidad (pu). ....	72
<b>Tabla 5. 25.</b> Datos de las potencias de generación distribuida en cada fase.....	72
<b>Tabla 5. 26.</b> Voltajes máximos y mínimos con generación distribuida.....	73
<b>Tabla 5. 27.</b> Voltajes máximos y mínimos con generación distribuida.....	74

## **1. INFORMACIÓN GENERAL**

**Título:**

Modelo matemático de aproximación cuadrática para el flujo óptimo de potencia en redes eléctricas de distribución trifásicos desbalanceados.

**Fecha de inicio:**

Lunes 16 de noviembre del 2020

**Fecha de finalización:**

Jueves 12 de agosto del 2021

**Lugar de ejecución:**

Latacunga

**Facultad que auspicia:**

Ciencias de la Ingeniería y Aplicadas (CIYA)

**Carrera que auspicia:**

Ingeniería Eléctrica en Sistemas Eléctricos de Potencia

**Proyecto de investigación vinculado:**

Redes inteligentes y generación distribuida

**Equipo de Trabajo:**

Tutor: Ing. Quinatoa Caiza Carlos Iván MSc.,

Estudiantes: Avilés Ilaquiche Alex Fabián,

Ramos Borja Yessenia Elizabeth

**Área de Conocimiento:**

07 ingeniería, Industria y Construcción / 071 Ingeniería y Profesiones Afines / 0713

Electricidad y Energía.

**Línea de investigación:**

Energías Alternativas y renovables, eficiencia energética y protección ambiental.

**Sub líneas de investigación de la Carrera:**

Explotación y diseño de sistemas eléctricos de potencia.

## **2. INTRODUCCIÓN**

### **2.1. EL PROBLEMA:**

#### **2.1.1. Situación Problémica:**

En la maniobra y planeación del Sistema Eléctrico de Potencia (SEP) una de las cuestiones más importantes ha sido el estudio del Flujo Óptimo de Potencia (OPF), esto se debe a que en las últimas décadas dicho problema ha tomado relevancia debido a su habilidad para encontrar soluciones óptimas considerando la seguridad del sistema.

El estudio del Flujo Óptimo de Potencia (OPF) es muy importante en los contextos de manipulación y planeación de la operación del (SEP), al permitir optimizar la condición de trabajo del sistema eléctrico con respecto a un criterio que relaciona a la economía, la seguridad y medio ambiente, respetando al mismo tiempo las restricciones más importantes de operación del sistema. La función objetivo más común es la de minimizar las pérdidas de potencia activa y la minimización del costo de generación de la potencia real incluyendo las pérdidas de la red.

Asimismo, el problema de OPF es complejo en tres aspectos: económico, eléctrico y computacional. Económicamente, puesto que en los mercados eléctricos se requieren varias partes de fijación de precios no lineales. En términos eléctricos es complejo, dado que en dicho problema se incluyen las ecuaciones de flujos de potencia de corriente alterna que son de carácter no lineal, y finalmente se dice que es complejo computacionalmente por el manejo de la no convexidad en la optimización, incluyendo además variables binarias y funciones continuas, haciendo el problema de OPF una cuestión difícil de resolver. De hecho, los programas comerciales de optimización matemática no pueden garantizar un óptimo global, además no soportan demasiadas restricciones de la red eléctrica.

#### **2.1.2. Formulación del problema:**

Uno de los problemas más recurrentes en el cálculo del OPF, es que presentan no linealidades en el modelo y esto no permite determinar si es un óptimo local o global.

### **2.2. OBJETO Y CAMPO DE ACCION**

330000 Ciencias Tecnológicas / 3306 Ingeniería y Tecnología Eléctricas / 330609 Transmisión y distribución.

## **2.3. BENEFICIARIOS:**

### **2.3.1. Beneficiarios directos**

Empresas eléctricas de distribución.

### **2.3.2. Beneficiarios indirectos**

Usuarios conectados al servicio de la red eléctrica de distribución y estudiantes de ingeniería eléctrica.

## **2.4. JUSTIFICACIÓN:**

La optimización de los sistemas eléctricos de potencia ha evolucionado gracias a los avances de la tecnología y al surgimiento de nuevas técnicas de optimización, así como a mejoras en los métodos convencionales. Se puede decir que los primeros estudios del OPF, los operadores del sector eléctrico utilizaban herramientas primitivas, como analizadores de redes analógicos e incluso acudían a su juicio dada la experiencia que tenían en el área. Este concepto era variable debido a la poca demanda de energía eléctrica y a bajo grado de interconexión de los sistemas eléctricos de potencia, pues el despachar potencia eléctrica de los generadores resultaba una área fácil, pero con el aumento en la demanda en las tres principales áreas del sector eléctrico (generación, transmisión y distribución), así como la complejidad operacional de las redes eléctricas, ha generado que las estrategias para la operación del sistema eléctrico de potencia no sean suficientes basándose únicamente en la experiencia de los operadores. Por tal motivo, se adoptaron nuevas técnicas de solución, y se implementó el uso de asistencia computacional para auxiliar la intuición de la experiencia del operador.

Por lo expuesto anteriormente, se pretende desarrollar un modelo matemático de aproximación cuadrática para el OPF, en sistemas eléctricos de distribución incluyendo generación distribuida (GD), siendo apto para los diferentes tipos de cargas y su topología del sistema, con la ayuda del software Matlab, puesto que permite resolver problemas convexos presentando de grandes ventajas, como la resolución numérica de forma eficiente y el alcanzar soluciones óptimas globales.

## **2.5. HIPÓTESIS**

Mediante el desarrollo del modelo matemático de aproximación cuadrática para el flujo óptimo de potencia en redes eléctricas de distribución trifásicos desbalanceados, se obtendrá una solución convexa, eficiente y rápida para la minimización de pérdidas considerando los límites para satisfacer el estado del sistema eléctrico de distribución.

## **2.6. OBJETIVOS:**

### **2.6.1. General:**

Desarrollar un modelo matemático de aproximación cuadrática, mediante el uso de series de Taylor en el plano complejo para el flujo óptimo de potencia en redes de distribución trifásicos desbalanceados.

### **2.6.2. Específicos:**

Investigar el estado del arte, de aproximación cuadrática para redes trifásicos desbalanceados.

Plantear un modelo matemático de aproximación cuadrático para el flujo óptimo de potencia en redes de distribución trifásicos desbalanceados.

Simular el modelo matemático propuesto utilizando la función CVX del software Matlab, para la comparación de los resultados obtenidos.

**2.7. SISTEMA DE TAREAS CON RELACIÓN A LOS OBJETIVOS PLANTEADOS**

<b>Objetivos específicos</b>	<b>Actividades (tareas)</b>	<b>Resultados esperados</b>	<b>Técnicas, Medios e Instrumentos</b>
Investigar el estado del arte, de aproximación cuadrática para redes trifásicos desbalanceados.	<p>-Investigación de material bibliográfico, referente a redes trifásicas desbalanceadas.</p> <p>-Análisis y recopilación de bibliografías encontradas para la utilización en la investigación.</p>	Información: definiciones, antecedentes de modelos matemáticos de aproximación cuadráticas.	Investigación bibliográfica: Tesis Artículos Papers Revistas científicas
Plantear un modelo matemático de aproximación cuadrática para el flujo óptimo de potencia en redes de distribución trifásicos desbalanceados.	<p>-Selección del material bibliográfico a utilizar en el presente proyecto.</p> <p>- Reconocimiento de las fórmulas y el uso en la optimización convexa.</p> <p>- Análisis del método matemático para su posterior programación.</p>	Desarrollo del modelo matemático para sistemas trifásicos desbalanceados.	Desarrollo de la metodología y diseño experimental. Matlab
Simular el modelo matemático propuesto utilizando la aplicación CVX del software Matlab, para la validación de los resultados obtenidos.	<p>Programación del modelo matemático mediante el uso de la aplicación CVX del software Matlab.</p> <p>Validación de resultados obtenidos.</p>	Simulación del sistema de pruebas de la IEEE usando el software Cymdist. Análisis comparativo de los resultados obtenidos.	Programa realizado en CVX Matlab. Tabla comparativa de resultados obtenidos.

### 3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

#### 3.1. ANTECEDENTES

El flujo óptimo de potencia (OPF), de las siglas del inglés (*Optimal Power Flow*), es una técnica para la operación en tiempo real de los sistemas eléctricos en redes inteligentes, en la cual la generación y la demanda son variables en el tiempo. El OPF, es uno de los problemas matemáticos más complejo de resolver, debido a la formulación matemática no lineal y no convexa, esto hace que impliquen esfuerzos computacionales para su resolución [1].

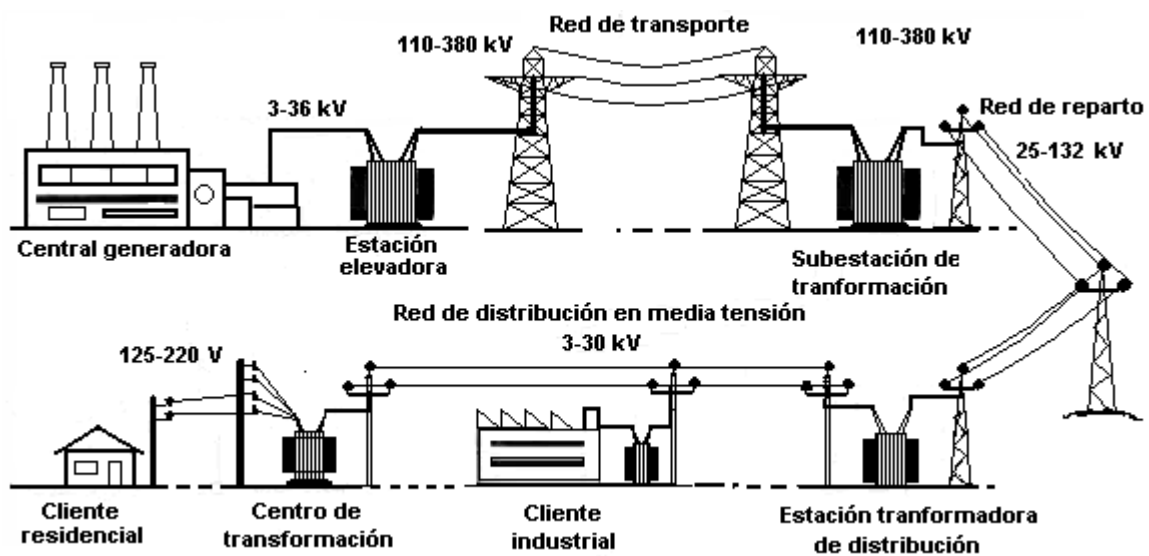
Según [2], en su artículo de investigación "Flujo de potencia óptimo usando el método del gradiente para reducción de pérdidas en sistemas de potencia", menciona que el flujo óptimo de potencia consiste en despachar una serie de generadores con el fin de minimizar o maximizar una función objetiva sujeta a restricciones de igualdad y desigualdad. La función objetiva puede ser la minimización de las pérdidas, la maximización del beneficio social neto, o la minimización del costo de generación, etc.

En el año 2016 [3], en su proyecto de investigación "Aproximación cuadrática al flujo de carga óptima en sistemas de distribución considerando generación distribuida", en los generadores de distribución, mediante la aproximación cuadrática para lo cual programo en el software Matlab CVX. Al ser un modelo no convexo el OPF, tiene varias formas de dar solución. Para el presente trabajo de investigación se utilizar la aproximación cuadrática. Uno de los problemas que radica es la falta de información en los sistemas de distribución debido a la falta de investigación, en comparación a los sistemas de transmisión.

En el trabajo de investigación bajo el tema "*A quadratic approximation for the optimal power flow in power distribution systems*", se realiza una exploración a la aproximación cuadrática para el OPF, teniendo en cuenta el flujo de carga para sistemas de distribución en sistema trifásico desbalanceado. La investigación realizada da como resultado un medio preciso con un buen perfil de voltaje. Uno de los problemas que existe al realizar la aproximación cuadrática radica en el funcionamiento de los sistemas de distribución puesto que son desbalanceados, para lo cual se utiliza las series de Taylor para la linealización de primer orden del OPF convencional, además se propone la programación no lineal [4].

### 3.2. SISTEMA ELÉCTRICO DE POTENCIA (SEP)

El sistema eléctrico de potencia (SEP), está formado por las etapas de, generación, transmisión, distribución y su objetivo es el consumo de la energía producida o generada para lo cual la energía que es producida debe ser transportada desde la generación hacia los centros de consumos para luego ser entregada de manera segura a los consumidores, con los mejores niveles de calidad [5], [6].



**Figura 3.1.** Sistema Eléctrico de Potencia (SEP), se observa la generación, la transmisión y la distribución [6].

La finalidad principal de los sistemas eléctricos de potencia (SEP), es satisfacer la demanda de la potencia eléctrica requerida por los usuarios, de manera constante y con calidad. Entre las restricciones que deben cumplir para la proporción del servicio esta: Los niveles de voltaje, el valor de la frecuencia debe estar dentro de cierta tolerancia, los equipos no deben operar fuera de los límites permitidos, además que el suministro debe ser confiable y al menor costo posible. Debido a las condiciones del sistema y las inyecciones de potencia activa y reactiva que presenta la generación y la carga, es posible determinar las condiciones eléctricas en estado estable para analizar su comportamiento. A este estudio se le conoce como estudio de flujos de potencia [6].



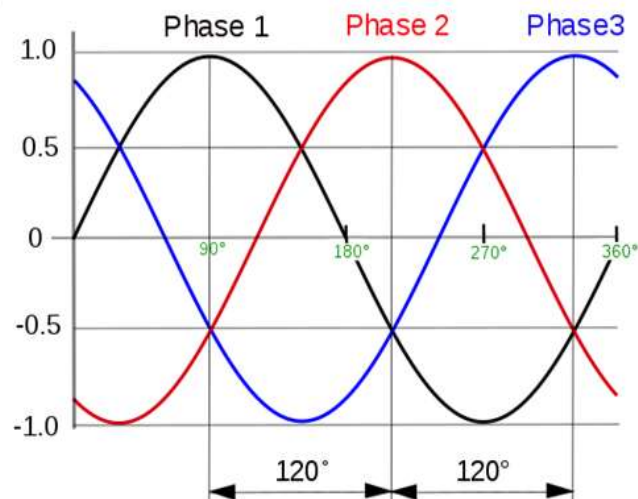
Mediante el estudio de flujos de potencia se realiza la planeación y el diseño de la expansión futura de los sistemas eléctricos, como también permite determinar las condiciones de los sistemas existentes. La información a obtener en un estudio de flujos de potencia es la magnitud y el ángulo de fase del voltaje en cada nodo, así también como la potencia real y la reactiva que fluye en la línea del sistema [7], [8].

### 3.2.1. Sistemas eléctricos trifásicos desbalanceados

En los sistemas eléctricos, es común encontrar con voltajes y corrientes que presentan un desbalance propio en cada fase de 120 grados, en muchos casos no ocurre siempre debido a que existe algunas variaciones en el sistema y la separación angular es distinta al valor antes mencionado. Al realizar un análisis en estado estacionario de una red eléctrica, se sabe que los elementos que lo componen se encuentran en completo equilibrio, teniendo en cuenta estos parámetros se realiza un análisis de tipo balanceado considerando únicamente la secuencia positiva. En la práctica, sin embargo, la carga no está completamente balanceada como es el caso de los sistemas de transmisión que posee una impedancia completamente balanceada [9].

Un sistema desbalanceado es el producto de dos posibles situaciones:

- Los voltajes de la fuente no son iguales y/o difieren en la fase en ángulos desiguales.
- Las impedancias de la carga no son las mismas.



**Figura 3.2.** Sistema trifásico desbalanceado [6].

### **3.3. CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LOS SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN**

Los sistemas de distribución forman una parte fundamental de los sistemas eléctricos de potencia, puesto que son los encargados de distribuir la potencia generada entre los usuarios, a su vez estos se encuentran dispersos en grandes territorios. Los sistemas de distribución resultan los complejos que los sistemas de potencia debido a que su distribución es a gran escala a comparación del sistema de potencia [10].

Debido al continuo aumento de la demanda registrado en la red de distribución y los desafíos operativos, las empresas de suministro de energía deben tener las habilidades analíticas adecuadas para resolver los problemas de manera efectiva. Esto muestra la necesidad de mejorar el método de análisis de la red eléctrica del sistema de distribución. Las nuevas técnicas para un sistema de distribución adecuado deben ofrecer:

- Alternativas para la toma de decisiones de manera rápida y económicamente variables.
- Una evaluación de decisiones sobre bases económicas y técnicas que involucren diferentes estrategias, mediante estudios periódicos.

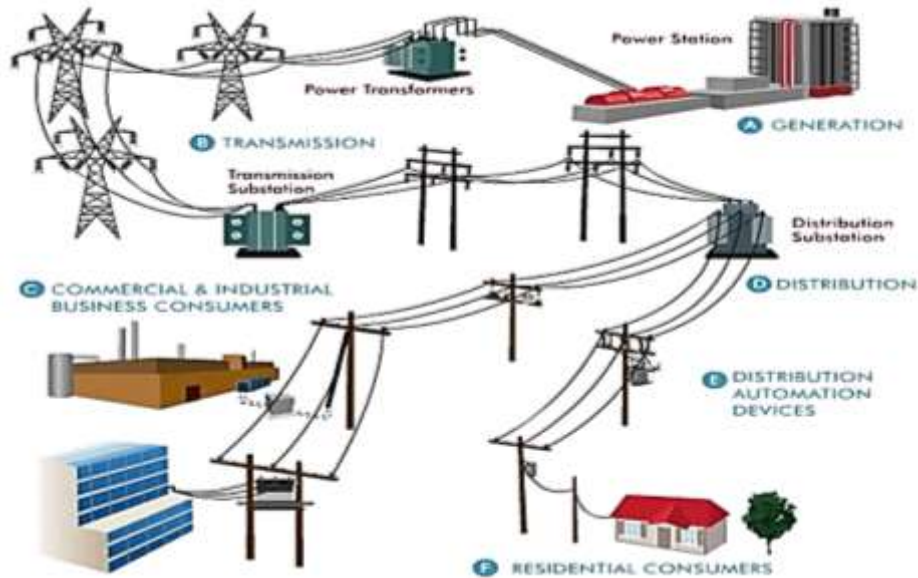
El estudio y análisis de los sistemas de distribución se utilizan, entre otros fines para:

- Optimizar la longitud de alimentadores secundarios.
- La solución al problema de flujos de potencia.
- Resolver una localización adecuada y eficiente de transformadores y banco de capacitores.

El sistema primario o alimentador principal, parte de la subestación de distribución donde también se encuentra el transformador de distribución, se puede tener más de dos alimentadores principales al cual se le conoce como circuito trifásico de cuatro hilos. Los alimentadores secundarios se derivan del alimentador principal a los cuales se los conoce como ramales o laterales estos a su vez pueden llegar a otro transformador o al consumidor final [7].

Una de las características de los sistemas de distribución son los circuitos laterales y sub-laterales puesto que pueden ser circuitos trifásicos o circuitos monofásicos, que se emplean en

áreas residenciales o rurales, en donde la carga depende de los requerimientos de los usuarios ya sean residenciales, comerciales, industriales o una combinación de ellos. Todas estas cargas forman la demanda del nodo, con un voltaje que se debe determinar de acuerdo a las características de la red y a la potencia activa y reactiva que ha de suministrarse [7], [8].



**Figura 3.3.** Sistema Eléctrico de Distribución [11].

### 3.3.1. Topología de la red

Al hablar de redes de distribución podemos citar los diferentes tipos de topologías que se utilizan para su conexión, cada una de ellas presentan ventajas y desventajas ya sean por el tipo de conexión, costes, etc.[12]. En las redes de distribución secundarias la configuración y las características depende del tipo de servicio, entre los cuales tenemos:

- Sistema radial
- Bancos secundarios
- Mallada

### 3.3.2. Elementos que forman la red de distribución

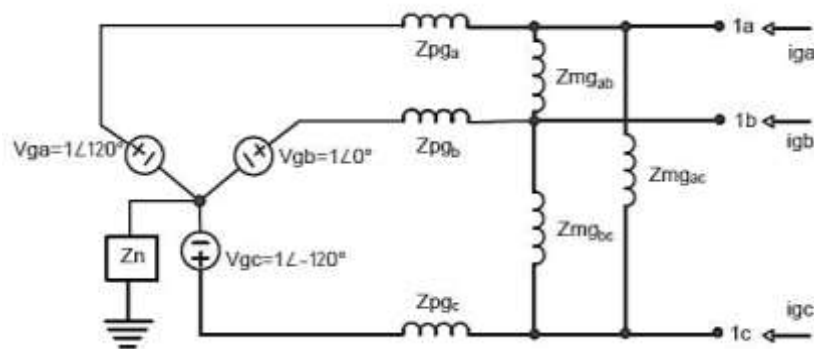
Entre los elementos que forman la red de distribución tenemos:

- Subestación de distribución
- Transformadores
- Líneas
- Cargas

### 3.4. MODELADO DE LOS ELEMENTOS DEL SISTEMA

Una de las herramientas más comunes y utilizadas para realizar estudios de planificación de sistemas de distribución y la planeación de operaciones de sistemas eléctricos es el llamado flujos de potencia. Las fórmulas ampliamente estudiadas son las aplicables a sistemas trifásicos balanceados, y estos son representados por parámetros de la red en la secuencia positiva; se lo realiza para los elementos en serie y para los elementos de derivación de la red. Los sistemas de distribución son inherentemente desbalanceados y la suposición balanceada no es aplicable [7], [8].

#### 3.4.1. Modelado del generador



**Figura 3.4.** Circuito equivalente del Generador [8].

En la **Figura 3.4.** se observa el diagrama equivalente del generador trifásico, mismo que está representado por impedancias en cada fase de la máquina, las impedancias son propias y mutuas, las fuentes de voltaje están representadas por su magnitud constante y un ángulo en desfase de 120 grados entre sí. Además, se observa  $Z_{pg\ a,b,c}$  que es la impedancia propia del generador en las fases, y  $Z_{mg\ a,b,c}$ . Es la impedancia mutua entre las fases del generador. A esto se le representa de forma matriz como se observa en la ecuación (3. 1).

$$Z_{gen}^{abc} = \begin{bmatrix} Z_{pg\ aa} & Z_{mg\ ab} & Z_{mg\ ac} \\ Z_{mg\ ba} & Z_{pg\ bb} & Z_{mg\ bc} \\ Z_{mg\ ca} & Z_{mg\ cb} & Z_{pg\ cc} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

En base a la ecuación (3.1), se puede definir los voltajes  $1_a$ ,  $1_b$  y  $1_c$ , de manera matricial en función de la corriente nodal donde está conectada al generador:

$$\begin{bmatrix} V_1^a \\ V_1^b \\ V_1^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g^a \\ V_g^b \\ V_g^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{pg\ aa} & Z_{mg\ ab} & Z_{mg\ ac} \\ Z_{mg\ ba} & Z_{pg\ bb} & Z_{mg\ bc} \\ Z_{mg\ ca} & Z_{mg\ cb} & Z_{pg\ cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_g^a \\ i_g^b \\ i_g^c \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

De manera compacta tenemos:

$$V_1^{abc} = V_g^{abc} + Z_{gen}^{abc} * i_g^{abc} \quad (3.3)$$

### 3.4.2. Modelado del transformador de potencia

En la Figura 3.5 se presenta la conexión de banco de trifásicos que se obtiene a partir de tres transformadores monofásicos, a continuación, se determina las ecuaciones nodales de un transformador en conexión Y-Y aterrizado en ambos extremos.

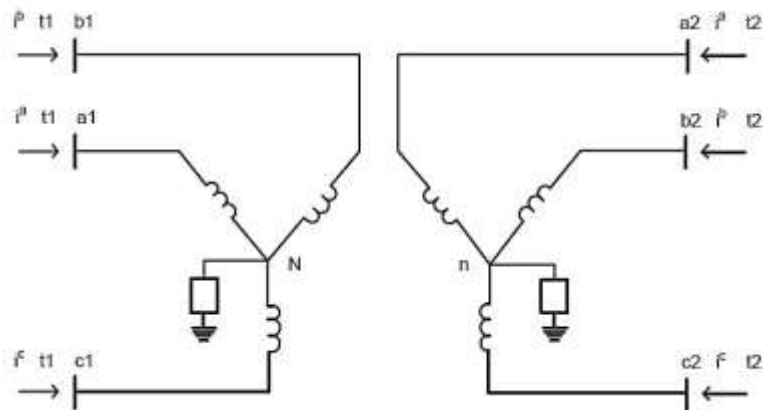
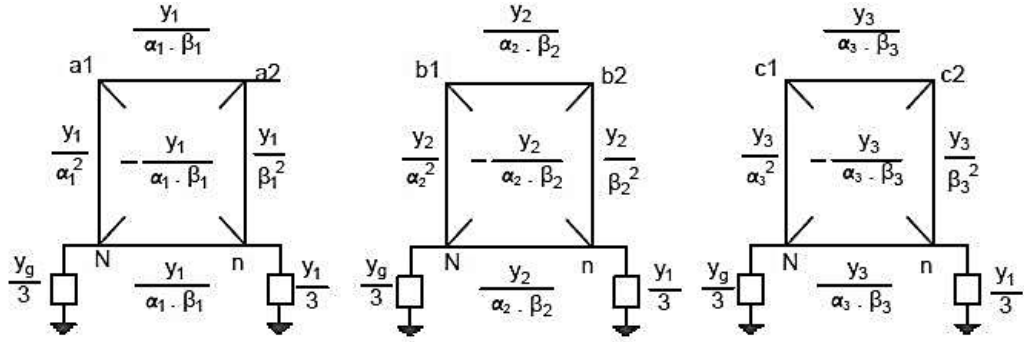


Figura 3.5. Modelo del transformador [8].

Considerando que el banco trifásico esta formados por un banco de transformadores monofásicos se obtiene los circuitos equivalentes que se presenta a continuación:


**Figura 3.6.** Circuito equivalente trifásico Y-Y [7].

Aquí existe dos alternativas: el incluir o no las ecuaciones de los neutros de la matriz de admitancias, en la siguiente ecuación se muestra la matriz incluyendo los neutros para luego realizar su eliminación.

$$\begin{bmatrix} Y_{t1-1}^{acbN} & Y_{t1-2}^{abcn} \\ Y_{t2-1}^{abcN} & Y_{t2-2}^{abcn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{abc} \\ V^N \\ V_2^{abc} \\ V^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{t1}^{abc} \\ 0 \\ i_{t2}^{abc} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Se procede a la eliminación de los nodos de neutro, para lo cual la representación matricial es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} Y_a & Y_{an} \\ Y_{na} & Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{abc} \\ V_2^{abc} \\ V^N \\ V^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{t1}^{abc} \\ i_{t2}^{abc} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} Y_a & Y_{an} \\ Y_{na} & Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{abc} \\ V^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^{abc} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Desarrollando el producto matricial resulta las siguientes ecuaciones:

$$Y_a V^{abc} + Y_{an} V^n = i^{abc} \quad (3.7)$$

$$Y_{na} V^{abc} + Y_n V^n = 0 \quad (3.8)$$

Despejando  $V^n$  de la ecuación (3.8):

$$V^n = -Y_n^{-1} Y_{na} V^{abc} \quad (3.9)$$

Sustituyendo la ecuación (3.9) en (3.8) y factorizando se obtiene:

$$(Y_a - Y_{an} \cdot Y_n^{-1} Y_{na}) V^{abc} = i^{abc} \quad (3.10)$$

Visto de manera compacta se obtiene:

$$[Y_t^{abc}] [V^{abc}] = [i^{abc}] \quad (3.11)$$

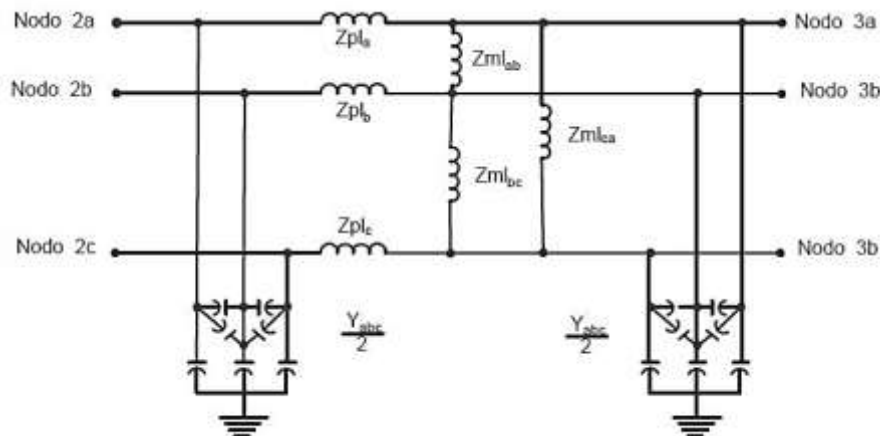
En la ecuación (3.11) se presenta  $Y_1^{abc}$ , es la matriz nodal del circuito equivalente, visto desde las tres fases de los nodos de baja y desde los tres nodos de alta. Por tal motivo la matriz de admitancia de los nodos del transformador sin incluir el neutro es:

$$Y_1^{abc} = \begin{bmatrix} Y_{t1}^{abc} & Y_{t12}^{abc} \\ Y_{t21}^{abc} & Y_{t2}^{abc} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

En  $Y_{t1}^{abc}$  es la sub-matriz que corresponde a las admitancias conectadas a las tres terminales del lado de alta del transformador (lado izquierdo).  $Y_{t21}^{abc}$  y  $Y_{t12}^{abc}$  son sub-matrices que representa la conexión de alta y de baja del transformador.  $Y_{t2}^{abc}$  es la sub-matriz de admitancias conectada en el lado de baja (lado derecho). Cada sub-matriz representa una matriz de 3x3 en referencia al número de fases con la que cuenta el banco [7].

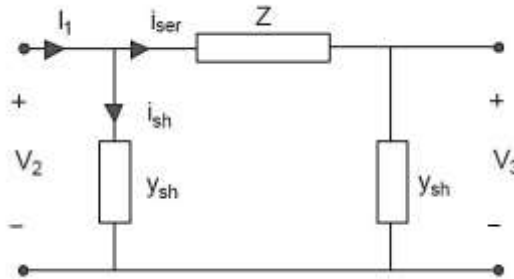
### 3.4.3. Modelado de las líneas de transmisión

A pesar del efecto capacitivo e inductivo que ocurre en las líneas de transmisión puesto que son de naturaleza distribuidos, se puede tener un circuito equivalente con parámetros concentrados como se muestra a continuación:



**Figura 3.7.** Modelo de línea para la configuración trifásica abc [8].

Esta forma trifásica, si es balanceada, es posible representar por el equivalente de la figura que se presenta a continuación, donde la secuencia positiva permite simplificar el desarrollo de las ecuaciones.



**Figura 3.8.** Modelo de la línea de transmisión [8].

Obtenemos las siguientes ecuaciones de la Figura 3.8.

$$V_2 - V_3 = Z_{i_{ser}} \quad (3.13)$$

$$i_{ser} = Z^{-1}(V_2 - V_3) \quad (3.14)$$

$$i_{ser} = y(V_2 - V_3) \quad (3.15)$$

$$i_1 = i_{ser} + Y_{sh}V_2 \quad (3.16)$$

Al sustituir  $i_{ser}$  en  $i_1$  se obtiene:

$$i_1 = y(V_2 - V_3) + y_{sh}V_2 \quad (3.17)$$

$$i_1 = (y + y_{sh})V_2 - yV_3 \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18), se puede generalizar para una representación trifásica, y continua con la corriente en el nodo 2 para las tres fases:

$$\begin{bmatrix} i_{2a} \\ i_{2b} \\ i_{2c} \end{bmatrix} = \left[ Y_{abc} + \frac{Y_{abc}}{2} \right] - [Y_{abc}] \begin{bmatrix} V_{3a} \\ V_{3b} \\ V_{3c} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Considerando el efecto de los parámetros distribuidos, y no tomando en cuenta el efecto capacitivo de la línea, con base a la Figura 3.8 esta simplificación es posible en redes cortas y de baja tensión; como es el caso de los circuitos de distribución.

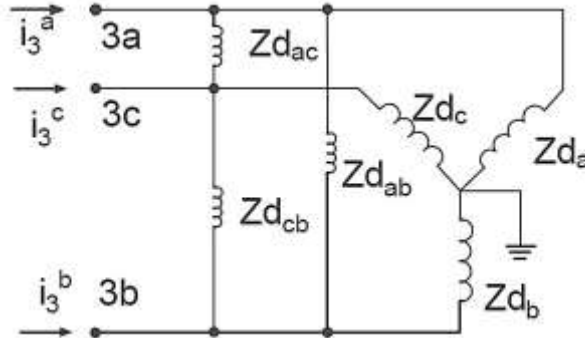


$$Z_{labc} = \begin{bmatrix} Zpl_a & Zml_{ab} & Zml_{ac} \\ Zml_{ba} & Zpl_b & Zml_{bc} \\ Zml_{ca} & Zml_{cb} & Zpl_c \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Donde,  $Zpl_a, Zpl_b, Zpl_c$ , son las impedancias propias de la línea, mientras que  $Zml_{ab}, Zml_{ac}, Zml_{bc}$ , son las impedancias mutuas entre las fases de la línea.

#### 3.4.4. Modelado de las cargas concentradas

Los modelos de carga utilizado en el estudio de flujos se pueden representar como admitancias con parámetros concentrados. En las subestaciones de redes de distribución no refleja la carga por usuarios sino el efecto resultante de la combinación de todas las cargas de los consumidores. El estudio de flujos de potencia en los sistemas de distribución ayuda a determinar la corriente que se demanda del nodo que está conectado y las caídas de tensión que se provocan a la circular corriente por las impedancias de los elementos. En la Figura 3.9 se muestra el equivalente de una carga en estrella y conectada sólidamente.



**Figura 3.9.** Conexión estrella para carga trifásica [8].

Se obtiene el equivalente de Thévenin, expresado por la matriz de impedancia nodal la cual relaciona voltajes y corrientes nodales.

$$\begin{bmatrix} V_3^a \\ V_3^b \\ V_3^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Zd_a & Zd_{ab} & Zd_{ac} \\ Zd_{ba} & Zd_b & Zd_{bc} \\ Zd_{ca} & Zd_{cb} & Zd_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_3^a \\ i_3^b \\ i_3^c \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

De manera compacta tenemos:

$$V_3^{abc} = Z_d^{abc} i_3^{abc} \quad (3.22)$$

### 3.4.5. Formulación de la matriz de admitancias (abc) nodal del sistema

Para el estudio de los sistemas eléctricos de potencia, el análisis nodal se ha convertido en la técnica más usada en los últimos años. Lo cual es muy ventajosa no solo para el sistema de transmisión sino también para el análisis de los sistemas de distribución. La formulación nodal, o métodos de nodos, se basa en las leyes de Kirchhoff. Las variables de interés son los voltajes nodales y las inyecciones de corrientes que aportan los generadores [7], [8].

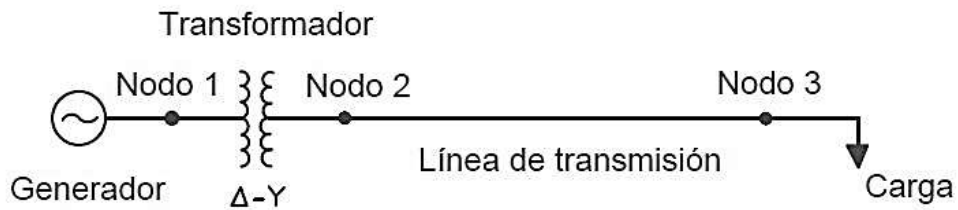


Figura 3.10. Representación unifilar de un sistema trifásico [7].

En la Figura 3.10 se muestra un SEP trifásico, que está formado por un generador, un transformador de conexión Δ-Y, una línea de transmisión y la carga. Para el estudio de los sistemas eléctricos es necesaria la formación de la matriz nodal de naturaleza trifásica.

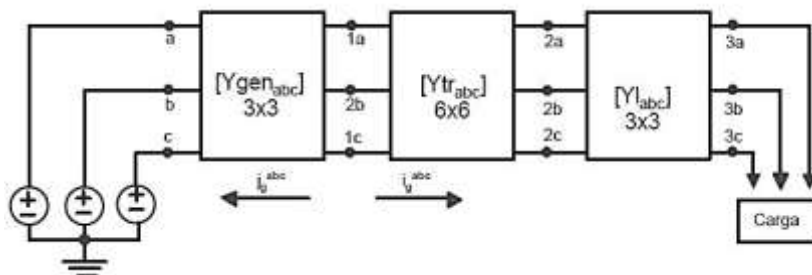


Figura 3.11. Representación trifásica [7].

En la Figura 3.11 muestra el equivalente trifásico de la figura 3.10. al contar con matrices de impedancia para cada elemento se puede formar la matriz de admitancia nodal  $Y_{nodal}^{abc}$ .

$$[Y_{nodal}^{abc}] \begin{bmatrix} V_1^{abc} \\ V_2^{abc} \\ V_3^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g^{abc} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Al incluir los elementos en la matriz de admitancias obtenemos:

$$\begin{bmatrix} Y_{gen}^{abc} + Y_{t1}^{abc} & -Y_{t12}^{abc} & 0 \\ -Y_{t21}^{abc} & Y_{t2}^{abc} + Y_{t23}^{abc} & -Y_{t23}^{abc} \\ 0 & -Y_{t32}^{abc} & Y_{t32}^{abc} + Y_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{abc} \\ V_2^{abc} \\ V_3^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g^{abc} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Como se puede observar la ecuación (3.15) la formación de la matriz es muy similar a la matriz de admitancias de un sistema monofásico, con la diferencia que los elementos que forma la matriz trifásica son las sub-matrices de orden 3. Las matrices de los elementos se suman en el elemento diagonal  $Y^{abc}$ , mientras que las sub-matrices fuera de la diagonal, en caso del transformador son las sub-matrices que corresponde a las ecuaciones nodales, si una línea de transmisión está fuera de la diagonal se escribe el negativo de la matriz de impedancia serie [7].

### 3.5. FLUJOS DE POTENCIA EN REDES DE DISTRIBUCIÓN

En el análisis de los sistemas de distribución la modelación de los flujos de potencia se realiza desde un conjunto de nodos, que están unidos entre sí por medio de las líneas de transmisión y los transformadores. Además, cuenta con una fuente general de alimentación el cual está localizada en la subestación, también se cuenta con la información sobre las cargas conectas en los nodos del sistema.

En el estudio de flujos de potencia se considera las cargas, las cuales están expresadas como potencias complejas demandadas  $S_{Di}$ . Al analizar los nodos del sistema se puede encontrar con dos tipos de nodos: nodos de generación o nodos PV, también conocido como voltaje controlado. También se encuentran los nodos de carga o nodos PQ. Un caso particular son los nodos de interconexión, puesto que son considerados nodos de carga con valor de potencia compleja  $S_i = 0$ .

### 3.5.1. Modelo matemático para el estudio de flujo

Antes de establecer un modelo matemático, se debe comprender como circula los flujos de potencia en la red. Se estima que en cada nodo existe una potencia compleja, del cual también se conoce el valor del voltaje y se termina la corriente nodal.

La potencia compleja del nodo  $S_m$ , inyectada en el nodo m esta dada por:

$$S_m = V_m I_m^* \quad (3.25)$$

Donde  $I_m^*$  es la corriente compleja conjugada en el nodo m.

Suponiendo un valor para el voltaje  $V_m$ :

$$I_m = \left( \frac{S_m}{V_m} \right)^* = \frac{P_m^{neta} - jQ_m^{neta}}{V_m^{neta}} \quad (3.26)$$

Es importe tener claro la inyección de la potencia por medios de fuentes de generación, puesto que las cargas tendrán una inyección de valor negativo. Por lo cual obtendremos la definición de la potencia neta en el nodo m, la cual está dada como la diferencia entre la potencia de generación menos la potencia demandada. A continuación, se planea las ecuaciones de manera compleja y separando la parte real y la parte imaginaria:

$$S_m^{neta} = S_{Gm} - S_{Dm} \quad (3.27)$$

$$P_m^{neta} = P_{Gm} - P_{Dm} \quad (3.28)$$

$$Q_m^{neta} = Q_{Gm} - Q_{Dm} \quad (3.29)$$

Para iniciar el proceso del estudio de flujos de potencia se toman los voltajes en el nodo del sistema con el valor de la fuente. En nodo inicial esta descrita como nodo 1, su valor esta descrita como un valor en por unidad. Además, que al nodo 1, también se le considera como nodo de referencia. Es habitual iniciar el proceso por el denominado perfil plano de voltajes, el cual consiste iniciar con un voltaje y ángulo de  $1 \angle 0^\circ$ .

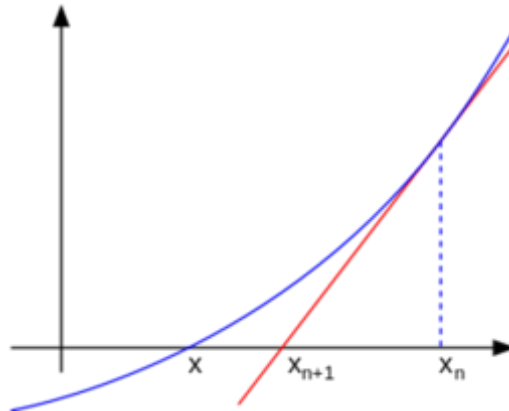
Según el método a utilizar se obtiene la solución a cada iteración, en cada iteración los voltajes son actualizados y alcanza su convergencia cuando la diferencia del valor de una iteración con otra, es menor que la tolerancia preestablecida.

$$\Delta V = V_m^{k+1} - V_m^k \quad (3.30)$$

El proceso iterativo finaliza cuando los valores de desajustes cumplen con la tolerancia especificada. Los valores de tolerancia son fijados por las empresas, que denotan el grado de exactitud de los voltajes en la solución, puesto que son los valores que satisfacen la demanda en todos los nodos [7].

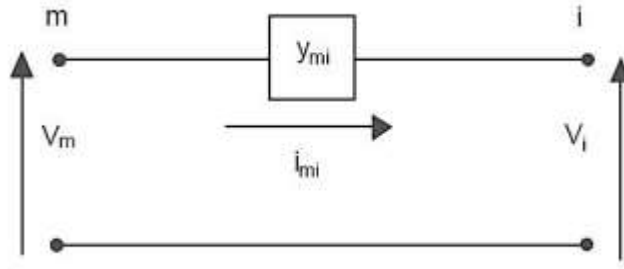
### 3.5.2. Método de solución mediante Newton Raphson

Dado que la formulación del método se basa en la expansión de la función no lineal en la serie de Taylor y se trunca en la primera derivada, el método puede asegurar la convergencia de manera más rápida en más casos haciéndolo así un proceso iterativo. El proceso de convergencia se muestra en la Figura 3.12. La tangente en el punto inicial  $X(0)$  se encuentra con la primera estimación  $X(1)$  después de aplicar el valor de corrección  $\Delta X$  [13].



**Figura 3.12.** Interpretación geométrica del método de Newton Raphson [13].

Aplicando la teoría básica de los circuitos eléctricos, en la Figura 3.12 la corriente en el elemento m-i, en función a la admitancia serie, está dada por la ecuación (3. 62).



**Figura 3.13.** Admitancia en serie [7].

$$i_{m-i} = (V_m - V_i)y_{m-i} \quad (3.31)$$

Donde  $i_{m-i}$  es la corriente en el elemento m-i,  $V_m$  es el voltaje en el nodo m,  $V_i$  es el voltaje en el nodo i,  $y_{m-i}$  es la admitancia entre el nodo m y el nodo i.

En el desarrollo de los flujos de potencia los valores conocidos son las potencias, pero no las corrientes, por tal motivo se puede escribir la ecuación de la potencia compleja en términos de voltajes nodales y los valores de admitancia tomadas de la matriz de admitancia nodal  $Y_{bus}$ . Tomando como ejemplo la Figura 3.12 para el nodo m tenemos:

$$P_m - jQ_m = V_m^* \sum_{i=1}^n Y_{mi} V_i \quad m = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32) figura el modelo matemático del problema de flujos de potencia, y da paso a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales los cuales los voltajes nodales y las admitancias son números complejos los cuales son expresados en forma polar o de manera rectangular el cual tiene una magnitud y un ángulo como se muestra en las (3.33) y (3.34).

$$V_m = |V_m| \angle \delta_m \quad (3.33)$$

$$Y_{m-i} = |Y_{m-i}| \angle \gamma_{m-i} \quad (3.34)$$

Si a la ecuación (3.32) la expresamos de manera polar tenemos.

$$P_m - jQ_m = \sum_{i=1}^n |V_m| |Y_{m-i}| |V_i| e^{j(\delta_i - \delta_m + \gamma_{mi})} \quad (3.35)$$

Separando la parte real e imaginaria obtenemos las siguientes expresiones.

$$P_m = \operatorname{Re}[P_m - jQ_m] = \sum_{i=1}^n |Y_{m-i}| |V_m| |V_i| \cos(\delta_i - \delta_m + \gamma_{m-i}) \quad (3.36)$$

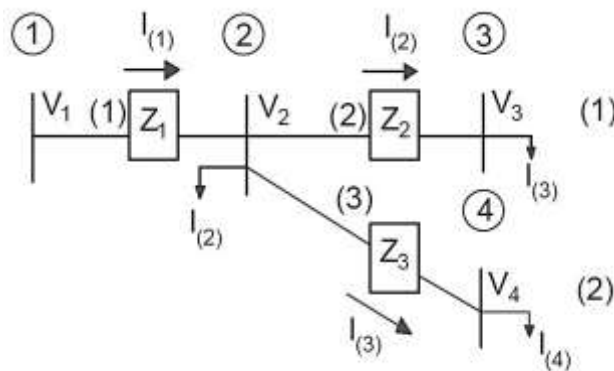
$$Q_m = -\operatorname{Im}[P_m - jQ_m] = \sum_{i=1}^n |Y_{m-i}| |V_m| |V_i| \sin(\delta_i - \delta_m + \gamma_{m-i}) \quad (3.37)$$

Las ecuaciones (3.36) y (3.37), deben ser escritas para cada nodo. En los nodos PQ y en los nodos de generador o de voltaje controlado se conocen cuatro cantidades, P, Q,  $|V|$  y  $\delta$ . Esto muestra que existe dos incógnitas para cada nodo y requiere de dos ecuaciones. En el caso de utilizar el método de Newton Raphson se debe encontrar las derivadas parciales de las ecuaciones mencionadas al inicio de este párrafo [7].

### 3.5.3. Método de solución de Gauss, mediante inversión parcial Y nodal

Se considera un método de iteración poco competitivo para resolver ecuaciones simultáneas, este puede proporcionar soluciones suficientemente precisas pero su desventaja es que, si el sistema no es lineal, el número de iteraciones suele ser muy grande y no siempre converge hacia una solución o a veces la convergencia es muy lenta [13].

El método de Gauss es otra manera para la solución de voltajes nodales, al igual que el método de Newton Raphson que lleva el proceso iterativo. Mediante la matriz  $Y_{nodal}$  y asumiendo conociendo el voltaje del nodo 1, el voltaje en los demás nodos es desconocido. Las corrientes nodales se obtienen mediante la multiplicación de la matriz de impedancias por los voltajes nodales.



**Figura 3.14.** Sistema eléctrico de cuatro nodos [7].

En la Figura 3.14 se presenta un sistema eléctrico de potencia (SEP), de cuatro nodos del cual se procede a representar matricialmente, por lo que tenemos:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

La expresión matemática compacta sería:

$$[Y_{nodal}][V_{nodal}] = [I_{nodal}] \quad (3.39)$$

Para el sistema de cuatro nodos se considera al nodo 1 como nodo slack, como es un caso de flujos en distribución se considera el nodo fuente como la única aportación de potencia al sistema. Aplicamos la relación entre la potencia y la corriente nodal expresada en la ecuación (3.39), se puede escribir una forma iterativa como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} S_m &= V_m I_m^* \\ &= P_m + jQ_m \end{aligned} \quad (3.40)$$

Entonces se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} I_m &= \left( \frac{S_m}{V_m} \right)^* \\ &= \left( \frac{P_m + jQ_m}{V_m} \right)^* \end{aligned} \quad (3.41)$$

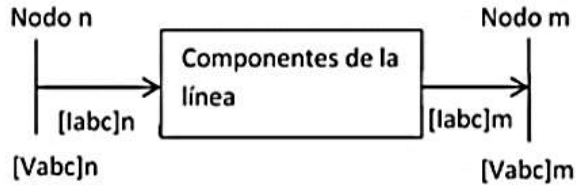
Utilizar el método de Gauss para sistemas de 30 nodos o más se convierte en un tema de mayor dificultad para lo cual se requiere de programas computacionales, memorias y un tiempo de cálculo. Es importante, por lo tanto, plantear el método de solución usando técnicas de dispersidad y usar factores de la matriz inversa parcial.

#### 3.5.4. Método de solución mediante corriente nodales

Este modelo permite la solución del flujo de potencia basado en la ley de Kirchhoff (KVL y KCL, por sus siglas en inglés) para calcular las corrientes de rama y los voltajes nodales en el backward y forward sweep [14]. En sistemas de distribución de redes radiales, sin necesidad de una matriz jacobiana, los pasos del método se basan en iteraciones de voltaje y corriente, que se repiten hasta alcanzar el resultado deseado. Este método se implementa en dos etapas y consiste en un proceso iterativo, que finaliza con un escaneo hacia adelante al verificar el voltaje



de la subestación, y el voltaje obtenido a través de la iteración no excede el error determinado  $e = 10^{-4}$ .

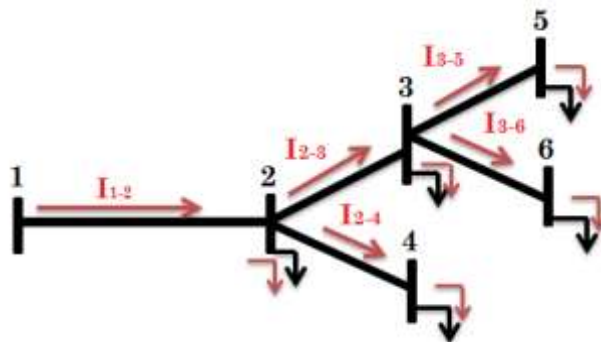


**Figura 3.15.** Esquema para dos nodos cualquiera m o n [15].

Al aplicar el método iterativo, partiendo de cualquier voltaje  $V_{abc}$  m, el primer barrido es para obtener la corriente del nodo anterior. Suponiendo que el nodo es la subestación, se debe verificar que el valor de voltaje calculado no tenga un error mayor al error del voltaje de la subestación.

**A. Primera ley de Kirchhoff (barrio hacia arriba)**

El método de corrientes está basado en las Leyes de corrientes de Kirchhoff, también es conocido como barrido hacia arriba. Menciona una vez calculado las corrientes nodales, se procede a calcular las corrientes que pasan las líneas lo cual se logra a partir del ordenamiento nodal, este proceso inicia en los nodos del extremo final y termina en el nodo slack [14]. La figura 3.15 muestra un ejemplo del análisis de corrientes.



**Figura 3.16.** Barrio hacia arriba [14].

Las corrientes por las líneas son:

$$I_{3-5} = i_5 \quad (3.42)$$

$$I_{3-6} = i_6 \quad (3.43)$$

$$I_{2-4} = i_4 \quad (3.44)$$

$$I_{2-3} = i_3 + I_{3-5} + I_{3-6} \quad (3.45)$$

$$I_{1-2} = i_2 + I_{2-3} + I_{2-4} \quad (3.46)$$

La ecuación que generaliza el proceso anterior esta expresada por:

$$I_{PQ} = i_Q + \sum_{m \in M} I_{QM} \quad (3.47)$$

Donde  $I_{PQ}$  es la corriente por la línea,  $i_Q$  es la corriente demandada en el nodo de recibo,  $I_{QM}$  es la corriente demandada por las líneas conectadas al nodo de recibo,  $M$  es el conjunto de líneas conectadas al nodo de recibo.

Una vez realizado el cálculo de barrido hacia arriba o cálculo de corrientes se procede a calcular el voltaje o barrido hacia abajo.

### B. Segunda ley de Kirchhoff (barrido hacia abajo)

Posteriormente al cálculo de las corrientes por las líneas se procede a calcular los voltajes nodales a partir de las caídas de tensión que se presenta en cada tramo de la red, al realizar un barrido hacia abajo iniciamos desde el nodo slack y finalizamos en los nodos extremos como se muestra a continuación [14].

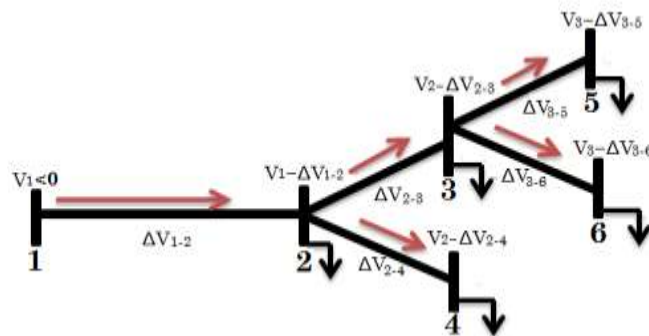


Figura 3.17. Barrido hacia abajo [14].

Los voltajes en los nodos son:

$$V_1 = 1 \angle 0 \quad (3.48)$$

$$V_2 = V_1 - Z_1 * I_{1-2} \quad (3.49)$$

$$V_3 = V_2 - Z_{2-3} * I_{2-3} \quad (3.50)$$

$$V_4 = V_2 - Z_{2-4} * I_{2-4} \quad (3.51)$$

$$V_5 = V_3 - Z_{3-5} * I_{3-5} \quad (3.52)$$

$$V_6 = V_3 - Z_{3-6} * I_{3-6} \quad (3.53)$$

La ecuación que generaliza el proceso anterior esta expresada por:

$$Pérdidas_{totales} = \sum_{x=1}^n I_x^2 \cdot R_x \quad (3.54)$$

Donde n es el número de ramas que existe en el circuito.

Si el delta de pérdidas es mayor a una tolerancia dada, se itera una vez más, si no se detiene el proceso de cálculo iterativo.

$$|Pérdidas_{totales(k)} - Pérdidas_{totales(k-1)}| < Tolerancia \quad (3.55)$$

Debido a los problemas que existen para dar solución a los flujos de potencia, varios investigadores han propuestos otras diferentes formulaciones y aproximaciones matemáticas tanto lineales como no lineales, también se pueden utilizar procesos iterativos para llegar a un resultado.

### 3.6. FLUJO ÓPTIMO DE POTENCIA

Al hablar del estudio de los flujos óptimo de potencia, se puede detallar las atribuciones del problema, en la enunciación común. En algunos casos no se incluyen las restricciones, sin embargo, en aplicaciones especiales puede tener diferentes tipos de restricciones. Las características más comunes son:

#### 3.6.1. Función objetiva

Es una formulación significativa dentro del flujo de potencia óptimo, pues es muy necesaria en el proceso de optimización matemático para obtener una solución óptima al problema. La

función objetivo simboliza un criterio utilizado para la optimización [16]. Hoy en día existe varios tipos de función objetivo, ya sea para minimizar o maximizar diferentes cuestiones, esto puede ser la minimización del costo de generación de energía, donde el costo de las unidades de generación térmica son generalmente una función de segundo orden.

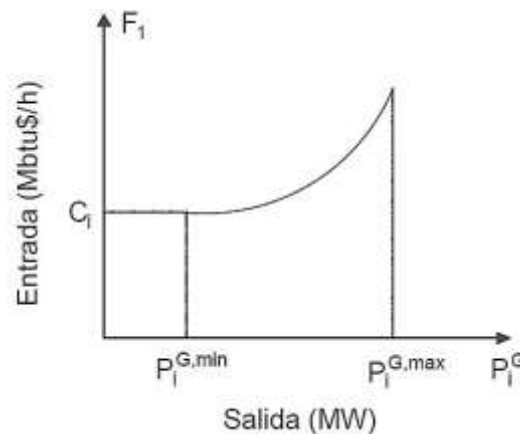
$$F_T = \sum_{i=1}^{n_g} F_i(P_i^G) \quad (3.56)$$

Donde  $F_i$  es el costo de combustible de la unidad  $i$ ,  $P_i^G$  es la potencia activa generada por la unidad  $i$ ,  $n_g$  es el número de generadores en el sistema, incluyendo la generación slack.

Al ser generación térmica la fórmula de la función objetivo anterior se podría desglosar de la siguiente manera:

$$F_i(P_i^G) = a_i + b_i \cdot (P_i^G) + c_i \cdot (P_i^G)^2 \quad (3.57)$$

Donde  $a_1, b_1, c_1$  son los coeficientes de costo de la unidad  $i$ ,  $c_1$  equivale al consumo de combustible de la operación de la unidad generadora sin potencia de salida.



**Figura 3.18.** Curva de entrada/salida, características de la unidad generadora [16].

En la Figura 3.18 se observa la potencia de salida de la unidad generadora limitada por límites inferiores y superiores, dada la capacidad máxima y mínima de la unidad generadora, la potencia neta está dada en MW.

### 3.6.2. Variables de decisión

La variable de decisión es un conjunto de variables cuya magnitud se debe hallar y están estrechamente atadas a decisiones de determinados problemas. En el estudio de los flujos de potencia óptimo estas variables determinan los valores que se deberá realizar en el sistema eléctrico de potencia para garantizar la seguridad, confiabilidad y factibilidad [16].

Las variables en los sistemas eléctricos de potencia se pueden clasificar en variables de control, que también se les conoce como variables de decisión independientes o variables de estado.

#### A. Variable de control

Uno de los problemas que presenta los OPF, está relacionado con las variables de control, puestos que las variables son continuas dentro del límite operativo, y debido a la potencia activa y la potencia reactiva hacen que el problema de optimización sea no convexo, de esta manera se complica la obtención de la solución al problema. Para ello se denota la posición del tap de los transformadores y también se inyecta potencia reactiva para su compensación [16].

Las variables de control son valores que pueden ser ajustados directamente con el fin de encontrar una solución óptima y satisfacer las restricciones al sistema eléctrico. Las variables de control pueden ser:

- La potencia activa asignada a la unidad de generación.
- La potencia reactiva asignada a la unidad de generación.
- Magnitud de tensión de los nodos de generación.
- Posición del tap del transformador.
- Angulo de los transformadores desfasados.

#### B. Variable de estado

Dentro del problema de los flujos de potencia óptimo tenemos las variables de estados que son todas las variables dependientes, estas variables se pueden calcular a partir de las variables de control. Entre las variables de estados tenemos [16]:

- La potencia del nodo slack.
- Magnitud de tensión en los nodos de carga.
- Potencia reactiva asignada a los generadores.
- Ángulo de fase de todos los nodos (excepto el slack).
- Flujo de potencia en la red de transmisión.

### 3.6.3. Restricciones

Al realizar el estudio de flujos óptimo de potencia, nos encontramos con restricciones que están dadas por las ecuaciones de balance de carga. Esto dando a entender que se impone una restricción de balance de potencia activa y reactiva en todos los nodos del sistema. Los tipos de problemas de OPF determinan un sistema de ecuaciones de gran tamaño y disperso dada la interconexión de los nodos al sistema de potencia [17].

Las restricciones en el problema de flujo de carga óptima, pueden ser restricciones de igualdad que en muchos casos son las ecuaciones del balance de potencia en los nodos del sistema; es decir la potencia generada debe garantizar la demanda del sistema más las pérdidas de la red. Las restricciones de desigualdad son los límites operativos que deben satisfacer las variables de control.

Las variables de control son:

- Potencia activa de los generadores.
- Potencia reactiva de los generadores.
- Magnitud del voltaje de los generadores.

Los parámetros son:

- La potencia activa y reactiva deben de estar dentro de los límites operativos.
- Límite inferior y superior de la magnitud del voltaje.
- Transformación de coordenadas polares a rectangulares del voltaje complejo.

### 3.7. SERIES DE TAYLOR

La serie de Taylor es la aproximación de funciones mediante una serie de potencias o suma de potencias enteras de polinomios como  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ , a los cuales se les denomina términos de la serie, a estas sumas se les calcula a partir de las derivadas de la función para un determinado valor o punto  $a$ , suficientemente derivable sobre la función y un entorno sobre el cual converja la serie [18].

#### 3.7.1. Series de Taylor en el plano complejo

El teorema de Taylor se generaliza a las funciones  $f: C \rightarrow C$  que son complejas diferenciables en un subconjunto abierto  $U \subset C$  del plano complejo. Sin embargo, su utilidad es eclipsada por otros teoremas generales en el análisis complejo. Es decir, se pueden deducir versiones más sólidas de resultados relacionados para funciones diferenciables complejas  $f: U \rightarrow C$  utilizando la fórmula integral de Cauchy de la siguiente manera. Deje  $r > 0$  tal que el disco de cierre  $B(z, r) \cup S(z, r)$  está contenida en  $U$ . Entonces la fórmula integral de Cauchy con una parametrización positiva  $\gamma(t) = z + re^{it}$  del círculo  $S(z, r)$  con  $t \in [0, 2\pi]$  da:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw, \dots, f^k(z) \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw \end{aligned} \quad (3.58)$$

Aquí todos los integrandos son continuos en el círculo  $S(z, r)$ , lo que justifica la diferenciación bajo el signo integral. En particular, si  $f$  es una vez diferenciable complejo en el conjunto abierto  $U$ , entonces es realmente un número infinito de veces complejo diferenciable en  $U$  [19].

Estas valoraciones implican que la compleja serie de Taylor:

$$T_f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (z-c)^k \quad (3.59)$$

de  $f$  converge uniformemente en cualquier disco abierto  $B(c, r) \subset U$  con  $S(c, r) \subset U$  en alguna función  $T_f$  [19].

### 3.7.2. Series de Taylor para funciones holomorfas

Se dice que una función es monógama en un punto  $a$ , si tiene derivada en ese punto. La homogeneidad es sinónimo de derivabilidad.

$$f \in \text{monógama}/a := f \in \text{DER}/a \quad (3.60)$$

La variable compleja es holomorfa si tiene derivada en todos los puntos de un entorno de  $a$ .

$$f \in \frac{H}{a} := \exists U(a): \forall z \in U(a) \Rightarrow f \in \frac{\text{DER}}{z} \quad (3.61)$$

A partir de las definiciones es evidente que:  $f \in H/a \Rightarrow f \in \text{monógama}/a$  Hay funciones que son monógamas pero no holomorfas [20].

Para la realización de la linealización se debe realizar mediante el uso de las series de Taylor, para lo cual se debe comprobar que la función sea holomorfa, mediante la utilización de las propiedades matemáticas de las series de Taylor.

### 3.7.3. Propiedades de las series de Taylor

La fórmula de Taylor es uno de los resultados fundamentales del análisis matemático el cual consta con un gran abanico de aplicaciones. El origen está ligado con problemas de gran aplicación a la ciencia como pueden ser problemas de optimización y aproximación de funciones [18].

#### A. Teorema 1

Sea  $f$  una función  $n+1$  veces derivables en un intervalo  $I$ . dados dos puntos cualquiera  $x, a$  en  $I$  con  $x \neq a$ , se verifica que existe algún punto  $c$  en el intervalo abierto de extremos  $a$  y  $x$  tal como se presenta a continuación [18].

$$f(x) - T_n(f, a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (3.62)$$

#### B. Teorema 2

La función holomorfa es aquella que es derivable en diferentes puntos dentro de un entorno o dominio. Para que la función sea holomorfa, debe cumplir la siguiente condición:



- Su función debe ser continua, por ende, la parte real e imaginaria de la función debe ser constante.

Decimos que  $f$ , es holomorfa en un abierto  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , si es derivable en todos los puntos de  $\Omega$ . También decimos que  $f$ , es holomorfa en  $Z_0$ , si es derivable en algún entorno de  $Z_0$  [16].

Funciones armónicas, donde la sumatoria de la segunda derivada de la función, sea cero.

### C. Teorema 3

Si  $f$ , es derivable en  $Z_0$ , entonces es continua en  $Z_0$ . Basta observar que la conclusión se cumpla incluso si  $f$ , solo es derivable en  $Z_0$ , en el sentido real [16].

Debe cumplir con la condición de Cauchy-Riemann, para formar la función armónica conjugada.

### 3.8. CONDICIONES DE CAUCHY RIEMANN

Las condiciones que ligan las derivadas de la parte real e imaginaria de una función compleja, son llamadas tradicionalmente de Cauchy-Riemann, pero son originalmente de D'Alembert-Euler. Ellas representan la igualdad de los límites de los cocientes incrementales según caminos rectos paralelos a los ejes coordenado [20].

Sea  $f = u + iv$ , una función  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , abierto y sea  $Z_0 = X_0 + iy_0 \in \Omega$ . Entonces  $f$ , es derivable en  $Z_0$ , si y solo si  $u, v$  son diferenciables en  $(X_0, y_0)$  y cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann [20], [21].

$$U_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (3. 63)$$

#### A. Demostración

$$f(V) = \frac{1}{V}, \quad \text{es holomorfa} \quad (3. 64)$$

Para iniciar se debe separar la parte real de la imaginaria.

$$f(z) = \frac{1}{V} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} \quad (3. 65)$$

Para la resolución de esta ecuación se debe factorizar la ecuación de modo que:

$$f(z) = \frac{x}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} \quad (3.66)$$

Después:

$$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i \left( -\frac{y}{x^2+y^2} \right) \quad (3.67)$$

Realizamos la separación de la ecuación de tal forma que tenemos:

$$U = \frac{x}{x^2+y^2} \quad ; \quad V = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad (3.68)$$

Se debe realizar las ecuaciones diferenciales tanto para x como y, lo cual queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{dV}{dx} &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{dU}{dy} &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{dU}{dy} &= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Como la ecuación (3.69), cumple con la condición de Cauchy Riemann la función es no holomorfa, es decir es derivable en diferentes puntos dentro del entorno.

Ecuación de Cauchy-Riemann

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dV}{dy} \quad ; \quad \frac{dU}{dy} = \frac{dV}{dx} \quad (3.70)$$

### 3.9. MODELO ZIP

A partir de la impedancia constante, corriente constante y potencia constante es posible presentar el modelo de la carga compuesto o modelo polinomial ZIP, para esto se usan diferentes modelos los cuales utilizan ciertos porcentajes de cada uno.

### A. Impedancia constante

Este modelo de carga está relacionado con cargas residenciales (planchas, nevera, estufa, etc.). La potencia varía de manera directa al voltaje, lo que da a entender que cuando existe un incremento del voltaje, necesariamente debe aumentar la corriente para mantener la impedancia [22]. Esta expresada de la siguiente forma:

$$I_N = \frac{V_N}{Z} \quad (3.71)$$

Donde  $I_N$  es la corriente nominal de la carga,  $V_N$  es voltaje nominal de la carga,  $Z$ : Es la impedancia de carga.

Si el voltaje y la corriente es real de la carga, se obtiene:

$$I = \frac{V}{Z} \quad (3.72)$$

Al igualar las ecuaciones (3.71) y (3.72), se obtiene:

$$I = \frac{I_N V}{V_N} \quad (3.73)$$

Al usar  $S = S_N$  y despejar la corriente, se reemplaza en la ecuación (3.73).

$$S = \frac{S_N V^2}{V_N^2} \quad (3.74)$$

### B. Corriente constante

Este modelo de carga está relacionado con artefactos eléctricos, es decir que la variación de tensión es mínima al igual que la corriente, esto se utiliza para el estudio de armónicos. Esta expresada a partir de las ecuaciones (3.71) y (3.72) de la siguiente manera:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_N}{Z_N} \quad (3.75)$$

Se despeja  $Z$ , que es la impedancia nominal de la carga.

$$Z = \frac{Z_N V}{V_N} \quad (3.76)$$

Y como  $S = S_N$  despejamos  $Z$  para los dos casos y se reemplaza en la ecuación (3. 76) se obtiene:

$$S = \frac{S_N V}{V_N} \quad (3. 77)$$

### C. Potencia constante

Este modelo se determina cuando la corriente disminuye y los voltajes aumentan generando un balance, esto ocurre cuando son cargas tipo industriales (motores) [15], se determina de la siguiente manera:

$$S = S_N \quad (3. 78)$$

### 3.10. MODELO POLINOMIAL

Al incluir las ecuaciones (3. 74), (3. 77) y (3. 78), se genera un modelo matemático conocido como como modelo ZIP, la cual expresa la potencia activa y reactiva en función de la tensión eléctrica al que está sometida, como se presenta a continuación:

$$P = \left[ a_{p0} + a_{p1} \left( \frac{V}{V_N} \right) + a_{p2} \left( \frac{V}{V_N} \right)^2 \right] \quad (3. 79)$$

$$Q = \left[ a_{q0} + a_{q1} \left( \frac{V}{V_N} \right) + a_{q2} \left( \frac{V}{V_N} \right)^2 \right] \quad (3. 80)$$

Donde  $a_{p0}, a_{p1}, a_{p2}$  son los coeficientes de la potencia activa, y  $a_{q0}, a_{q1}, a_{q2}$ : son los coeficientes de la potencia reactiva, ambas igual a 1 [23].

Utilizando  $S = P + Q$  se obtiene la siguiente ecuación:

$$S_K = S_{PK} + S_{IK} \left( \frac{V_K}{V_N} \right) + S_{ZK} \left( \frac{V_K}{V_N} \right)^2 \quad (3. 81)$$

Una vez que se obtiene el modelo matemático solo de potencias, se desea encontrar la corriente en función de estas, para lo cual se despeja la corriente partiendo de  $S = V \cdot I_K^*$ :

$$I_K^* = \frac{S_{PK}}{V} + S_{IK} \left( \frac{V}{V_N} \right) + S_{ZK} \left( \frac{V}{V_N} \right)^2 \quad (3. 82)$$

Donde  $I_k$ : es la corriente nodal inyectada al sistema, la tensión nominal del sistema  $V_N = 1$ , por lo cual tenemos:

$$I_K^* = \frac{S_{PK}}{V} + S_{IK} \left( \frac{V}{1} \right) + S_{ZK} \left( \frac{V}{1} \right)^2 \quad (3.83)$$

Finalmente se obtendrá el modelo a linealizar como se presenta en la ecuación (3.83).

$$I_K = \frac{S_{PK}^*}{V_K^*} + S_{IK}^* + S_{ZK}^* \cdot V_K \quad (3.84)$$

Con la ecuación (3.84) se realizan las aproximaciones lineales cuadrática, para calcular el flujo de carga.

### 3.11. CVX MATLAB

CVX es un sistema de modelado para construir y resolver programas convexos disciplinados, soporta un número de tipos de problemas estándar, incluyendo programas lineales y cuadráticos, de segundo orden, y programas semidefinidos. El CVX también puede resolver problemas mucho más complejos problemas de optimización convexa, incluyendo muchos que implican funciones no diferenciables. Se puede utilizar el CVX para formular y resolver convenientemente la minimización de normas restringidas, la maximización de la entropía, la maximización determinante, y muchos otros programas convexos. CVX se implementa en Matlab, convirtiendo efectivamente a Matlab en un lenguaje de modelado de optimización [24].

### 3.12. SEDUMI

La palabra SeDuMi significa *Self-Dual-Minimization*, es un software complemento para Matlab, que permite resolver problemas de optimización con restricciones lineales, cuadráticas y semidefinidos. SeDuMi está inspirado en técnica conocida como empotrado autodual, que consiste en optimizar sobre conos homogéneos autoduales, esto admite la solución de problemas de una solo fase, lo cual lleva a una solución óptima [25].

Entre las características que sobresalta a SeDuMi esta:

- Permite utilizar valores complejos.
- Genera soluciones duales en problemas no viables.
- Aprovecha las matrices dispersas para acelerar la ejecución.
- Gestiona las columnas densas de forma separada, y con ello favorece la dispersión.

Entre las técnicas que utiliza SeDuMi para su desarrollo esta:

- El programa detecta bloques diagonales de SDPs y los convierte en variables no negativas.
- Las variables libres se incluyen en un cono cuadrático en lugar de separarlas.
- Si hay variables libres separadas, se agrupan.

SeDuMi se distribuye de forma gratuita bajo los términos de código libre [26].

### **3.13. CYME**

Es un software que se enfoca a las redes eléctricas de distribución, el cual es utilizado para modelar, abordar y analizar las necesidades de los sistemas eléctricos de distribución balanceados o desbalanceados.

#### **3.13.1. Cymdist**

Es el paquete básico que se utiliza para analizar el sistema de distribución del software CYME. Este reúne todas las herramientas de modelado y análisis necesarias para realizar los diversos tipos de simulaciones comprendidas en la planificación de un sistema eléctrico de distribución. El motor de cálculo admite modelos de distribución equilibrados o no equilibrados que se construyen utilizando cualquier combinación de fases y se ejecutan en configuraciones radiales, anillado o de mallado [27].

Entre los análisis que se puede realizar en cymdist están:

- Flujo de carga desbalanceado.
- Distribución y estimación de carga.
- Análisis de fallas.
- Balance de carga.

## 4. MATERIALES Y MÉTODOS

### 4.1. MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN

Para la realización del presente proyecto de investigación se aplica el método de investigación deductivo puesto que permite realizar el análisis de metodologías y procedimientos de cálculos para el modelo matemático de aproximación cuadrática, mediante el método descriptivo se ejecutará en el análisis de datos obtenidos para su respectiva comparación. La investigación bibliográfica permite el análisis de fuentes bibliográficas las cuales servirá para la presente investigación, entre las fuentes tenemos libros, folletos, revistas, papers, artículos científicos, tesis, etc.

### 4.2. MODELO MATAMÁTICO PARA EL OPF NO LINEAL

La estructura matemática general para la formulación de optimización de cualquier problema presentado en los sistemas eléctricos de potencia y en las redes eléctricas de distribución es la siguiente:

- **Formulación matemática básica para el flujo de potencia óptimo:**

Minimizar

$$F(X) \tag{4.1}$$

Sujeto a

$$X \geq 0 \tag{4.2}$$

$$g(x) = 0 \tag{4.3}$$

$$h \leq 0 \tag{4.4}$$

$$X \in \Omega \tag{4.5}$$

Donde  $F$  es la función objetivo a minimizar,  $X$  es la variable de decisión, esta variable es la que ejerce control para minimizar la función  $F$ , la ecuación (4.2) es la restricción de igualdad, que para el sistema eléctrico es la ecuación de balance P y Q, la ecuación (4.3) corresponde a los restricciones de límites técnicos de sistema eléctrico, como límites de generación, límite de las líneas, voltajes en los nodos, etc.  $\Omega$  representa el espacio de soluciones factibles que se puede minimizar [3].

El principal problema en la optimización se encuentra en ajustar la variable de control para de esta manera poder minimizar a la función objetiva.

El flujo óptimo de potencia se puede formular utilizando modelos matemáticos en coordenadas polares o rectangulares, esta descomposición se da debido al planteamiento del problema que se desea optimizar.

- **Formulación básica de la función objetiva**

Considerando la red de distribución tipo radial, donde  $N = 1, 2, 3, \dots, k$  representa el conjunto de todos nodos,  $g$  representa la conductancia,  $b$  representa la susceptancia,  $R$  representa la resistencia,  $V_{min}, V_{máx}$  representa los voltajes mínimos y máximos en los nodos. Por consiguiente, estos datos representan los parámetros del sistema, donde las variables del sistema son  $i_r$  e  $i_i$  que son las corrientes nodales tanto real e imaginario y  $V_r$  y  $V_i$  son los voltajes de los nodos que representa las variables de estado del sistema.

Minimizar

$$\sum_{k=1}^N I_k^2 \cdot R_k \quad (4.6)$$

Sujeto a:

$$i_{r(k)} = \sum_{m=1}^N g_{(km)} * v_{r(m)} - b_{(km)} * v_{i(m)} \quad (4.7)$$

$$i_{i(k)} = \sum_{m=1}^N g_{(km)} * v_{i(m)} + b_{(km)} * v_{r(m)} \quad (4.8)$$

$$v_{(k)}^2 = v_{r(k)}^2 + v_{i(k)}^2 \quad (4.9)$$

$$v_{min} \leq v_{(k)} \leq v_{max} \quad (4.10)$$

La ecuación (4. 6) minimiza las pérdidas activas de la red, la ecuación (4. 7) y (4. 8) representa la corriente de inyección nodal del sistema., la ecuación (4. 9) y (4. 10) representa los límites de voltaje en cada uno de los nodos.

El problema de optimización presentado anteriormente se puede cambiar la variable de decisión corriente por voltaje de la siguiente manera.



Tomando en cuenta la ecuación (4. 6):

$$P = I^2 \cdot R \quad (4. 11)$$

Donde la corriente se representa de forma compleja vectorial de  $\mathbb{C}^N$  y  $R$  representa la matriz de resistencia del sistema de  $\mathbb{R}^{RN}$ . Si reemplazamos a la corriente  $I = \frac{V}{R}$  nos queda de la siguiente manera.

$$P = \frac{V^2}{R^2} \cdot R \quad (4. 12)$$

Por lo tanto, la ecuación final es:

$$P = V^2 \cdot G \quad (4. 13)$$

Esta ecuación representas las pérdidas activas de la red en términos de la variable de voltaje. Si separamos la parte real e imaginaria del voltaje y lo desglosamos en términos nodales se puede obtener la siguiente función objetivo, como problema de minimización de pérdidas activas.

Se define al modelo óptimo de pérdidas no lineal de la siguiente manera [28]:

$$\begin{aligned} \text{minimizar}_{PL} = & \left( 2 \sum_{K=1}^N G_{(K0)} \cdot Vr_{(K)} \cdot V_{(0)} \right) + \left( \sum_{K=1}^N \sum_{m=1}^N G_{(km)} \cdot Vr_{(k)} \cdot Vr_{(m)} \right) \\ & + \left( \sum_{K=1}^N \sum_{m=1}^N G_{(km)} \cdot Vi_{(k)} \cdot Vi_{(m)} \right) \end{aligned} \quad (4. 14)$$

Sujeto a:

$$i_{r(k)} = \sum_{m=1}^N g_{(km)} * v_{r(m)} - b_{(km)} * v_{i(m)} \quad (4. 15)$$

$$i_{i(k)} = \sum_{m=1}^N g_{(km)} * v_{i(m)} + b_{(km)} * v_{r(m)} \quad (4. 16)$$

$$v_{(k)}^2 * i_{r(k)} = \left( p_{(k)} * v_{(k)}^{\alpha_{(k)}} + P_{g(k)} \right) * v_{r(k)} + \left( q_{(k)} * v_{(k)}^{\alpha_{(k)}} + Q_{g(k)} \right) * v_{i(k)} \quad (4. 17)$$

$$v_{(k)}^2 * i_{i(k)} = \left( p_{(k)} * v_{(k)}^{\alpha_{(k)}} + P_{g(k)} \right) * v_{i(k)} - \left( q_{(k)} * v_{(k)}^{\alpha_{(k)}} + Q_{g(k)} \right) * v_{r(k)} \quad (4. 18)$$

$$v_{(k)}^2 = v_{r(k)}^2 + v_{i(k)}^2 \quad (4. 19)$$

$$v_{min} \leq v_{(k)} \leq v_{max} \quad (4. 20)$$

$$P_{min} \leq P_{g(k)} \leq P_{max} \quad (4. 21)$$

$$Q_{min} \leq Q_{g(k)} \leq Q_{max} \quad (4. 22)$$

Donde  $G_{(K0)}$  es la conductancia respecto a la barra slack y el resto de nodos,  $Vr_{(K)}$  es el voltaje real en el resto de los nodos,  $V_{(0)}$  es el voltaje en la barra slack,  $G_{(km)}$  es la conductancia entre las líneas (nodo de envío y nodo de recepción),  $Vr_{(k)}$  el voltaje real del nodo de envío,  $Vr_{(m)}$  voltaje real del nodo de recepción.

La ecuación (4. 14) representa la función objetivo a minimizar y es convexo por ser cuadrático por lo que se garantiza el óptimo global. Las ecuaciones (4. 15) y (4. 16) representa a la corriente de inyección en todos los nodos. Las ecuaciones (4. 17) y (4. 18) representa el balance de potencia parte real y parte imaginaria en cada nodo, esta ecuación es no lineal, donde  $i_{r(k)}$ ,  $i_{i(k)}$  es la corriente real e imaginaria en todos los nodos,  $p_{(k)}$ ,  $q_{(k)}$  es la potencia real e imaginaria de inyección en los nodos,  $P_{g(k)}$ ,  $Q_{g(k)}$  es la potencia real e imaginaria de la generación distribuida,  $\alpha_{(k)}$  muestra el modelo polinomial ZIP. *Donde (0 = potencia constante, 1 = corriente constante, 2 = impedancia constante).*

La ecuación (4. 19) representa los voltajes en coordenadas rectangulares en cada nodo. La ecuación (4. 20) representa el límite mínimo y máximo de la magnitud del voltaje. La ecuación (4. 21) y (4. 22) representa la potencia activa y reactiva de los GD que deben estar dentro de los límites operativos.

### **4.3. APROXIMACIÓN CUADRÁTICA AL FLUJO DE CARGA ÓPTIMO EN SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN**

Las aproximaciones cuadráticas permiten llegar más allá de lo permitido por una aproximación lineal y brindando un campo más amplio para el desarrollo de operaciones matemáticas, sin pretender que esta sea exacta [3].

Para los problemas de flujos de potencia siempre se partirá desde una matriz de admitancias para lo cual los voltajes y las corrientes nodales están dado por  $I_N = Y_{BUS} \cdot V_{BUS}$ , y están relacionados de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} I_S \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{SS} & Y_{SN} \\ Y_{NS} & Y_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_S \\ V_N \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Donde  $S$  representa la barra slack y  $N$  es el conjunto de todos los nodos restantes.

Organizando términos se obtiene:

$$I_S = Y_{SS}V_S + Y_{SN}V_N \quad (4.24)$$

$$I_N = Y_{NS}V_S + Y_{NN}V_N \quad (4.25)$$

Donde  $I_N$  es la corriente en cada nodo que pertenece a  $\mathbb{C}^N$ ,  $Y_{NS}$  es la matriz de admitancias en la barra slack que pertenece a  $\mathbb{C}^{N \times S}$  vinculada con los demás nodos del sistema,  $V_S$  es el voltaje en la barra slack que pertenece a  $\mathbb{C}^S$ ,  $Y_{NN}$  es la matriz de admitancia de todos los nodos que pertenece a  $\mathbb{C}^{N \times N}$ ,  $V_N$  es el voltaje en cada nodo que pertenece a  $\mathbb{C}^N$  sin incluir la barra slack.

La ecuación (3.84) expresada en el capítulo anterior esta expresada en términos vectoriales, para la formulación del modelo matemático la corriente se toma en termino de cada nodo por lo que se tiene:

$$I_k = V_{k0}Y_{k0} + \sum_{i=1}^m Y_{km}V_m \quad (4.26)$$

La potencia nodal en cada uno de los nodos se representa por la siguiente ecuación

$$S_k = V_k \cdot I_k^* \quad (4.27)$$

Donde  $S_k$  es la potencia aparente en los nodos,  $V_k$  es el voltaje en los nodos,  $I_k^*$  es la corriente conjugada de los nodos.

De la ecuación (4.27) se procede a despejar  $I_k$  del cual se obtiene la ecuación (4.28)

$$I_k = \frac{S_k^*}{V_k^*} \quad (4.28)$$

Donde  $I_k$  es la corriente en los nodos,  $S_k^*$  es la potencia aparente conjugada en los nodos,  $V_k^*$  voltaje conjugado en los nodos. Esta ecuación representa la corriente de inyección nodal de potencia constante que es un término no lineal.

#### 4.4. SERIE DE TAYLOR PARA FUNCIONES NO HOLOMORFAS

Las series de Taylor es el teorema de generalización del valor medio de Lagrange, el cual implica un proceso de derivadas de funciones, el cual se hace iterativamente obteniendo la segunda y sucesivas derivadas de la función. De la ecuación (3. 84) del capítulo anterior que es la corriente nodal, se obtiene la siguiente expresión que esta modelada con los parámetros de la carga del modelo polinomial ZIP:

$$I_K = \frac{S_{PK}^*}{V_K^*} + S_{IK}^* + S_{ZK}^* \cdot V_K \quad (4. 29)$$

La primera expresión del segundo término de la ecuación (4. 29), es la potencia constante dividida entre el voltaje conjugado por lo tanto este término es no lineal, los términos restantes son lineales; por lo consiguiente se va a trabajar en este término.

$$\frac{S_{PK}^*}{V_K^*} = \frac{S_{PK}^*}{1 - \Delta V} \quad (4. 30)$$

Donde la función a linealizar en series de Taylor es:

$$f(\Delta V) = \frac{1}{(1 - \Delta V)} \quad (4. 31)$$

Donde se analiza la norma de variación del voltaje  $\|\Delta V\| < 1$  y su expansión en polinomio de series de Taylor alrededor de uno es:

$$\frac{1}{(1 - \Delta V)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta V^k, \|\Delta V\| < 1 \quad (4. 32)$$

Despreciando termino de orden superior, se define  $V = 1 - \Delta V$ , y se obtiene una aproximación lineal para la potencia constante:

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{(1 - \Delta V)} \approx 1 + \Delta V = 2 - V \quad (4. 33)$$

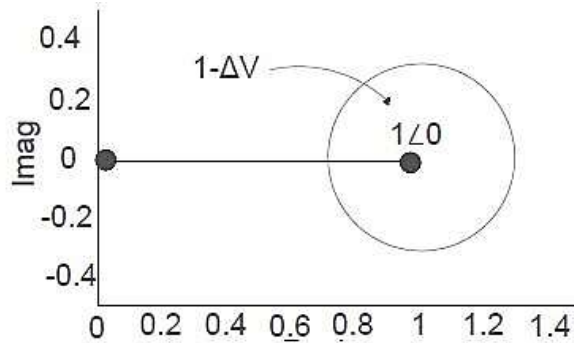
El error porcentual para la aproximación se calcula definiendo una función de error  $\psi: C \rightarrow R^+$ .

$$\psi(V) = 100. \left\| \frac{1}{V} - (2 - V) \right\| \quad (4. 34)$$

De modo que:

$$\psi(V) = 100 \cdot \left\| \frac{1}{0,8} - (2 - 0,8) \right\| = 5\% \quad (4.35)$$

Como se puede observar el porcentaje de error es del 5% lo cual quiere decir que este porcentaje determina el error que produce al linealizar nuestra función, determinando que el mismo, es válido para la aproximación cuadrática que se está realizando en este trabajo. Cabe mencionar que en la función de la ecuación (4.35), el porcentaje de error disminuye mientras el voltaje (V) se acerque más a 1 [23].



**Figura 4. 1.** Representación del error  $\psi$ , al utilizar la aproximación lineal de V, en el plano complejo [29].

#### 4.5. MODELO CUADRÁTICO LINEALIZADO

Con las ecuaciones anteriores (4.30) y (4.33) se procede a obtener la ecuación lineal de corrientes presentada en la siguiente ecuación:

$$I_N = S_p N^* \cdot (2 - V_N^*) + S_{IN}^* + S_{ZN}^* \cdot V_N \quad (4.36)$$

Al reemplazar la ecuación (4.36) en la ecuación (4.25) se obtiene la siguiente expresión:

$$Y_{NS} V_S + Y_{NN} V_N = 2S_{PN}^* - (S_{PN}^*)^* \odot (V_N)^* + (S_{IN})^* + (S_{ZN})^* \odot (V_N)^* \quad (4.37)$$

Donde  $\odot$  es el producto Hadarmard, por qué se debe multiplicar por cada uno de los términos de la ecuación.

Al igualar a cero y organizar términos se obtiene:

$$Y_{NS}V_S + Y_{NN}V_N - 2P_{PN}^* + (S_{PN})^* \odot (V_N)^* - (S_{PN})^* - (S_{ZN})^* \odot (V_N) = 0 \quad (4.38)$$

La función lineal se puede representar en la ecuación (4.38) y finalmente se podría expresar de la siguiente manera:

$$A + B \cdot V_N^* + C \cdot V_N = 0 \quad (4.39)$$

Donde A son los parámetros constantes del sistema, B se define como términos que acompañan a  $(V_N)^*$ , C se define como términos que acompañan a  $[V_N]$ .

Para lo cual se tiene:

$$A = Y_{NS}V_S - 2S_{PN}^* - S_{IN}^* \quad (4.40)$$

$$B = Y_{NN} - \text{diag}(S_{ZN}^*) \quad (4.41)$$

$$C = \text{diag}(S_{NP}^*) \quad (4.42)$$

Donde la constante A, son los parámetros de potencia constante conjugada y corriente constante conjugada. B, es el término que acompaña al voltaje nodal conjugado de los nodos, y representa la matriz Y nodal de barra  $N \times N$  y la impedancia constante de la carga. C, es el término que acompaña a la variable y representa a la potencia constante.

La función establecida en la ecuación (4.38), una vez obtenidas estas constantes, se procede a desglosar en parte real e imaginaria obteniendo la matriz representada en la ecuación (4.46).

Partiendo de la ecuación (4.39) se separa la parte real e imaginaria de la siguiente manera:

$$A_r + jA_i + (B_r + jB_i) \cdot (V_r - jV_i) + (C_r + jC_i) \cdot (V_r + jV_i) \quad (4.43)$$

Separando la parte real e imaginaria obtenemos:

$$A_r + B_r V_r + B_i V_i + C_r V_r - C_i V_i = 0 \quad (4.44)$$

$$A_i + B_i V_i - B_r V_r + C_i V_r + C_r V_i = 0 \quad (4.45)$$

De las ecuaciones (4.47) y (4.48) se procede a formar la matriz que se presenta a continuación:

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_r + C_r & B_i - C_i \\ B_i + C_i & -B_r + C_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_r \\ A_i \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Donde los subíndices  $r$  e  $i$  representa la parte real e imaginaria.

Simplificando términos para facilitar la interpretación de los mismos en la programación, se determina una matriz  $M$ , obteniendo la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} B_r + C_r & B_i - C_i \\ B_i + C_i & -B_r + C_r \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Para obtener los voltajes nodales se despeja de la ecuación (4.46) y se obtiene:

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_i \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -A_r \\ -A_i \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

La generación distribuida está dada por:

$$D \cdot S_g^* = D(S_r - S_i) \quad (4.49)$$

Expresando en una matriz se obtiene:

$$\begin{pmatrix} D \\ -D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_r \\ S_i \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Al ingresar el nodo de generación distribuida la ecuación quedara expresada de la siguiente manera:

$$A + B \cdot V_N + C \cdot V_N^* + D \cdot S_G^* = 0 \quad (4.51)$$

Donde  $D$  se define como una matriz  $N \times G$ ; siendo  $N$  el número de nodos y  $G$  el número de generación distribuida,  $S_G^*$  se define como la potencia aparente de la generación distribuida.

En forma matricial obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} D \cdot S_r \\ -D \cdot S_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_r \\ A_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_r + C_r & B_i - C_i \\ B_i + C_i & -B_r + C_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_r \\ V_i \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Donde  $S_r, S_i$  es la potencia activa y reactiva entregada por los generadores distribuidos,  $V_r, V_i$  es el voltaje obtenido en función de  $S_r, S_i$ ,  $A, B, C, D$  son términos constantes.

La ecuación (4. 39) ahora es reemplazada por la ecuación (4. 51), puesto que ahora esta ecuación esta con los parámetros en función de la generación distribuida.

Para obtener la matriz  $W$  partimos de:

$$\begin{pmatrix} D & S_r \\ -D & S_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_r \\ S_i \end{pmatrix} \quad (4. 53)$$

Y procedemos a multiplicar para obtener la siguiente expresión:

$$= M^{-1} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_r \\ S_i \end{pmatrix} \quad (4. 54)$$

Una vez obtenida la ecuación (4. 54), se realiza la matriz  $W$ , la cual deja el voltaje en función de la potencia generada y se representa de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} W_{rr} & W_{ri} \\ W_{ir} & W_{ii} \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad (4. 55)$$

Donde  $W$  es la matriz real.

Finalmente, obtiene la siguiente forma matricial:

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_r \\ U_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{rr} & W_{ri} \\ W_{ir} & W_{ii} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_r \\ S_i \end{pmatrix} \quad (4. 56)$$

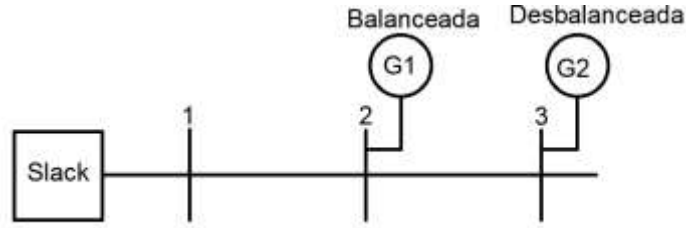
Donde  $V_r, V_i$ , de la ecuación (4. 25), son reemplazados por  $U_r$  y  $U_i$ , respectivamente.

Al aplicar los diferentes teoremas, el modelo matemático se linealiza, lo cual se puede simular con el software CVX Matlab, sin embargo, se requiere considerar diferentes funciones objetivo.

#### **4.6. EXTENSIÓN PARA EL MODELO CUADRÁTICO TRIFÁSICO DESBALANCEADO**

La aproximación cuadrática se puede extender a redes trifásicos desequilibrados, para lo cual se tendrán algunas consideraciones.





**Figura 4. 2.** Sistema de distribución trifásico con generación distribuida [4].

Para formar la matriz de admitancias nodal, se debe considerar un modelo trifásico con un bus slack trifásico,  $V_0 = 3 \times 1$ , donde  $V_0$ : no es una constante sino un vector [4].

La nueva constante está dada por  $\eta = \frac{1}{V_{nom}}$ .

Partiendo de la ecuación (4. 51), pero con ajustes en la matriz tenemos:

$$A = Y_{NS} \cdot V_S - 2\eta \cdot J_{NN}^T \cdot S_{PN}^* \circ T_N - \eta \cdot J_{NN}^T \cdot S_{IN}^* \circ T_N \quad (4. 57)$$

$$B = \eta^2 \cdot J_{NN}^T \cdot \text{diag}(S_{PN}^* \circ T_N^2) \cdot J_{NN} \quad (4. 58)$$

$$C = Y_{NN} - \eta^2 \cdot J_{NN}^T \cdot \text{diag}(S_{ZN}^*) \cdot J_{NN} \quad (4. 59)$$

$$D = \eta \cdot J_{NN}^T \cdot \text{diag}(T_N) \cdot D \quad (4. 60)$$

Donde  $T_{(Nx1)}$  es un vector complejo cuyos elementos corresponden a cada nodo por ejemplo  $T_k = e^{j\phi}$  con  $\phi \in \left(0, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$  según la secuencia,  $\circ$  es el producto de Hadamard (es decir, la multiplicación matricial convencional),  $J$  es una matriz real que indica el tipo de conexión de cada carga,  $D$  tiene la misma definición que en el caso monofásico, pero una nueva matriz compleja  $D$ , requiere ser definida a partir de la ecuación (4. 60) [4].

Las restricciones adicionales relacionadas con el modelado trifásico podrían incluirse directamente en  $D$ . Por ejemplo, algunos generadores podrían ser inapropiados para la generación desequilibrada (es decir, recursos renovables integrados por convertidores de fuente de voltaje de tres ramales). En esos casos, la potencia generada en cada fase debe ser igual a pesar del funcionamiento desequilibrado del resto del sistema [4]. Esto está representado por la ecuación (4. 61).

$$S_K = S_m = S_n \quad (4. 61)$$

Donde K, m, n, son fases diferentes del mismo bus trifásico.

La matriz D, para el sistema viene dada por la ecuación (4. 62), donde los nodos están ordenados por fase (es decir, primero la fase A, luego la fase B y finalmente la fase C)

$$= \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (4. 62)$$

Si los generadores y las cargas están conectadas en delta ( $\Delta$ ), entonces  $J_{NN}$ , está dado por:

$$J = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (4. 63)$$

Como D es complejo, las ecuaciones requieren ser modificadas, y quedan de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} W_{rr} & W_{ri} \\ W_{ir} & W_{ii} \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} D_r & D_i \\ D_i & -D_r \end{pmatrix} \quad (4. 64)$$

El modelo cuadrático para el OPF, se pueden extender para el modelado trifásico desbalanceado. Como se puede observar, el problema aumenta de tamaño.

#### 4.7. FUNCIÓN OBJETIVO

El desarrollo del modelo matemático de aproximación cuadrática se puede realizar con las ecuaciones anteriores, de la siguiente manera [4].

$$\begin{aligned} Min_{PL} = & V_{ra}^T \cdot G_{Na} \cdot V_{ra} + V_{ia}^T \cdot G_{Na} \cdot V_{ia} + 2 \cdot V_{ra}^T \cdot G_{Sa} \cdot V_{Sra} + G_{SSa} \\ & + V_{rb}^T \cdot G_{Nb} \cdot V_{rb} + V_{ib}^T \cdot G_{Nb} \cdot V_{ib} + 2 \cdot V_{rb}^T \cdot G_{Sb} \cdot V_{Srb} \\ & + G_{SSb} + V_{rc}^T \cdot G_{Nc} \cdot V_{rc} + V_{ic}^T \cdot G_{Nc} \cdot V_{ic} + 2 \cdot V_{rc}^T \cdot G_{Sc} \\ & \cdot V_{Src} + G_{SSc} \end{aligned} \quad (4. 65)$$

Sujeto a:

$$V_r = U_r + W_{rr} \cdot S_r + W_{ri} \cdot S_i \quad (4. 66)$$

$$V_i = U_i + W_{ir} \cdot S_r + W_{ii} \cdot S_i \quad (4. 67)$$

$$(1 - V_{r(k)})^2 + V_{i(k)}^2 \leq \delta_{max}^2 \quad (4. 68)$$

$$S_{r(k)} \leq S_{r(max)} \quad (4. 69)$$

$$S_{i(k)} \leq S_{i(max)} \quad (4. 70)$$

$$Z_{ir} \cdot S_{ir} = (V_i V_i - V_r V_r) \quad (4. 71)$$

Donde  $V_r^T$  es la variable real del voltaje transpuesto de los nodos y su dimensión es  $V_r^T \in \mathbb{R}^{1 \times 3N}$ ,  $G_N$  es el parámetro de la conductancia nodal y su dimensión es  $G_N \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}$ ,  $V_r$  es la variable real del voltaje nodal y su dimensión es  $V_r \in \mathbb{R}^{3N \times 1}$ ,  $V_i^T$  es la variable del voltaje imaginario transpuesto de los nodos y su dimensión es  $V_i^T \in \mathbb{R}^{1 \times 3N}$ ,  $G_S$  es el parámetro de la conductancia en el nodo slack y su dimensión es  $G_S \in \mathbb{R}^{3N \times 3}$ ,  $V_S$  es la variable de voltaje de la barra slack su dimensión es  $V_S \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ .  $G_{SS}$  es la conducencia de la barra slack de dimensiones

La ecuación (4. 65) es la función objetivo donde se minimiza las pérdidas de la red y es una función convexa por ser cuadrática. Las ecuaciones (4. 66) y (4. 67) representa a las restricciones de igualdad que son funciones afines y lineales, en donde la ecuación (4. 66) es la parte real del voltaje está en función de la potencia real e imaginaria de la generación. y la ecuación (4. 67) representan las restricciones correspondientes a la parte imaginaria del voltaje en función de la potencia real e imaginaria de la generación. La ecuación (4. 68) corresponde a la variación máxima que debe tener módulo de tensión en las otras barras respecto al valor 1 por unidad que corresponde a la barra slack. La ecuación (4. 69) y (4. 70) representa la potencia activa y reactiva máxima que puede suministrar las unidades de generación distribuida. La ecuación (4. 71) representa la restricción de la línea en el que se considera el límite de potencia aparente definido para el conductor, es decir la capacidad máxima para el conductor de la línea en  $MW + jMVAr$  que corresponde a la potencia compleja.

La formulación de la función objetivo (4. 65) se procede a obtener de la siguiente manera:

$$S = V' \cdot I^* \quad (4. 72)$$

De la ecuación (4. 72), la corriente se divide en dos secciones, una para el nodo slack y otra para los nodos restantes, quedando de la siguiente forma:

$$S = V_S \cdot I_S^* + V_N \cdot I_N^* \quad (4.73)$$

Reemplazando los términos de la ecuación (4.24) y (4.25) en la ecuación (4.73) se obtiene:

$$S = V_S' \cdot (Y_{SS}^* \cdot V_S^* + Y_{SN}^* \cdot V_N^*) + V_N' \cdot (Y_{NS}^* \cdot V_S^* + Y_{NN}^* \cdot V_N^*) \quad (4.74)$$

Al simplificar términos semejantes, se logra obtener la expresión:

$$S = V_S' \cdot Y_{SS} \cdot V_S^* + 2 \cdot V_N' \cdot Y_{NS} \cdot V_S^* + V_N' \cdot Y_{NN}^* \cdot V_N^* \quad (4.75)$$

Ahora se escribe en forma rectangular donde r e i, representan los valores reales e imaginarios respectivamente; obteniendo de esta manera las pérdidas del sistema  $P_L$ :

$$P_L = V_{Nr}' \cdot G_{NN} \cdot V_{Nr} + V_{Ni}' \cdot G_{NN} \cdot V_{Ni} + V_S' \cdot Y_{SS} \cdot V_S^* + 2 \cdot V_N' \cdot G_{NN} V_S \quad (4.76)$$

Donde  $P_L$  es la pérdida eléctrica del sistema, G es la matriz de conductancia.

#### 4.8. DIAGRAMA DE FLUJOS

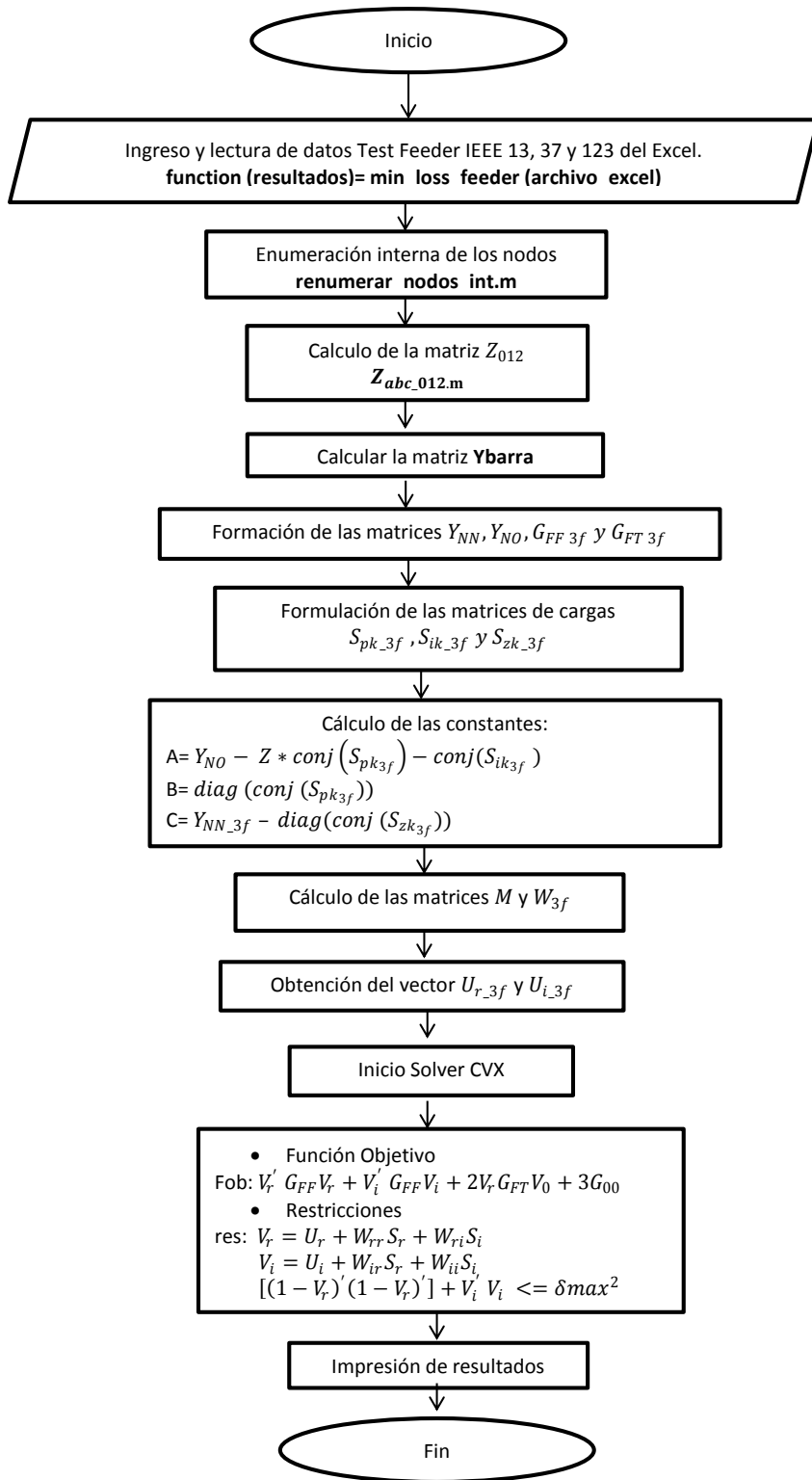


Figura 4. 3. Diagrama de flujo de la programación en Matlab.

## 5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En el presente capítulo se realizará el análisis de resultados obtenidos del modelo matemático de aproximación cuadrático, el cual se desarrolló en el capítulo 4 del presente trabajo de investigación.

Para la presentación de los resultados de la aproximación cuadrática se utilizó la función CVX y el solver SeDuMi del software de Matlab, con el fin de optimizar la función objetivo, mediante las restricciones planteadas las cuales permite realizar una optimización convexa y encontrar el óptimo global y se realizó un análisis comparativo con los resultados obtenidos, para lo cual se desarrolló simulaciones en el programa comercial CYMDIST.

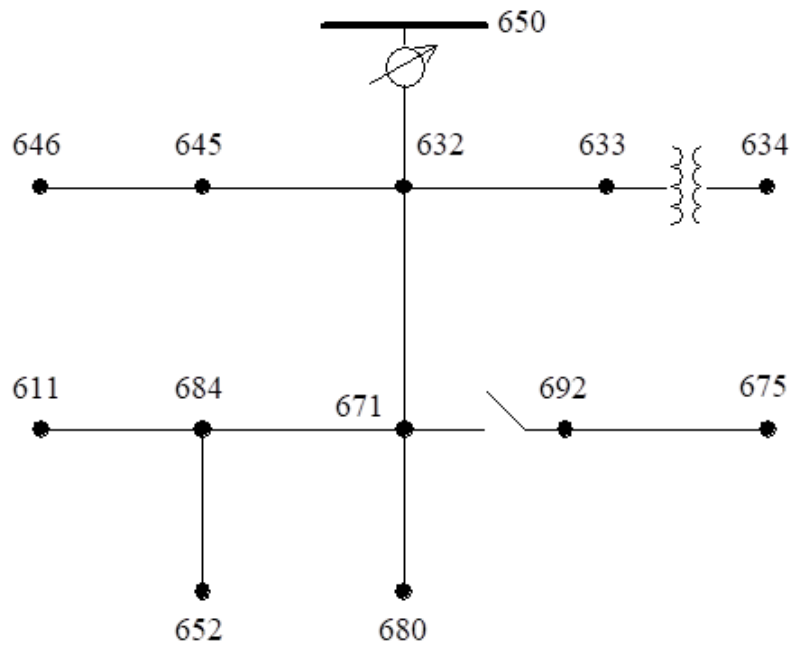
La base de datos fue tomada del sistema de pruebas de configuración radial, de la IEEE 13, IEEE 37 e IEEE 123 nodos en condiciones desbalanceadas, los datos se presentan en el anexo A.

### 5.1. COMPARACIÓN DEL MÉTODO UTILIZANDO EL SISTEMAS DE PRUEBAS DE LA IEEE 13 NODOS

Para el análisis del caso base se procede a simular en el software comercial Cymdist utilizando los datos del sistema de pruebas de la IEEE 13 nodos desbalanceados, y se realiza una comparación de resultados obtenidos con la programación del modelo matemático de aproximación cuadrático convexa realizada. Para este caso los datos iniciales no incluyen generación distribuida para ningún sistema de pruebas.

#### 5.1.1. Escenario 1: Caso Base sin Generación Distribuida

En la Tabla 5. 1 se muestra la topología del sistema de pruebas del IEEE 13 nodos trifásico desbalanceado, donde la demanda activa total de la fase A=1158 kW, fase B= 973 kW y fase C= 1135kW así como también la demanda reactiva total de la fase A= 606 kVAr, fase B=627 kVAr y fase C= 753 kVAr, estos son los valores picos de las demandas tomadas en un ahora determinada, además este sistema cuenta con una subestación de 115kv/4.16kv con una potencia de 5000 kVA , el tipo de carga existente en este circuito es de potencia constante kW-kVAr, impedancia constante Z y corriente constante I.



**Figura 5. 1.** Esquema de pruebas del sistema de pruebas IEEE13 [30].

Para el análisis se toma como referencia la barra slack al nodo 632, y no se considera el regulador de voltaje, además los datos de las líneas, transformador, así como las cargas se encuentran en el anexo A.1.

### A. Resultados obtenidos

Para el análisis se determinó las pérdidas totales de la red sin considerar ningún generador en el sistema, donde los resultados son los mostrados en la Tabla 5. 1, que están expresados en kW y en la Tabla 5. 2 en por unidad (pu) con una base de 1MW.

**Tabla 5. 1.** Pérdidas totales del sistema de 13 nodos en kW.

Sistema de Pruebas	Cymdist	Programación CVX
IEEE 13	51,84	47,11

Las pérdidas totales del sistema con respecto al modelo matemático tienen una diferencia de 4,73 kW, esta diferencia es debido a la linealización que se realizó para obtener el modelo de optimización cuadrática, sin embargo, el programa Cymdist utiliza el método de Newton Raphson completo para la solución de flujos de potencia.

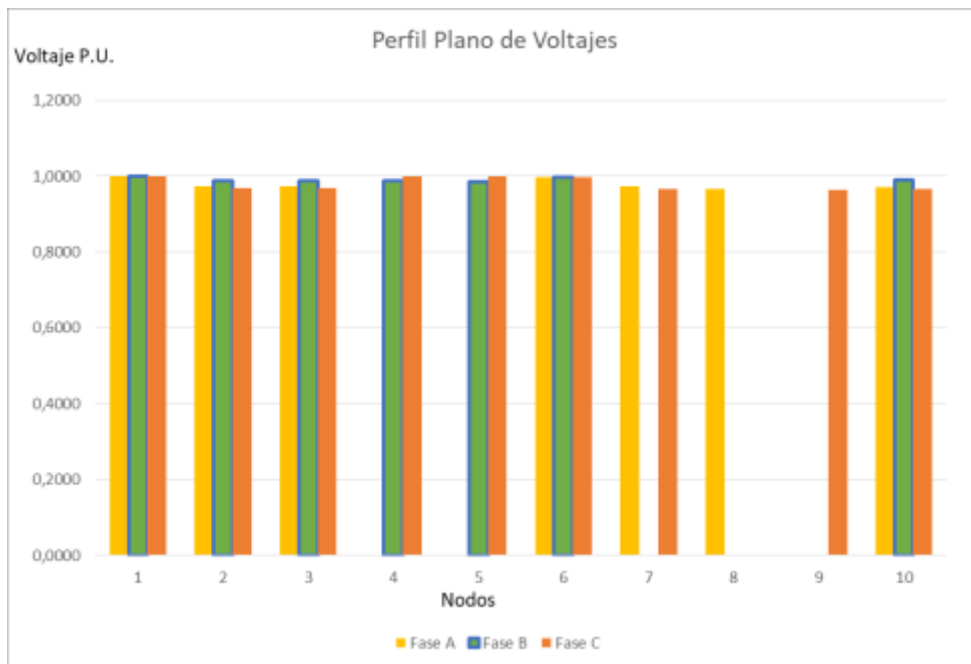
Estos resultados se procedieron a obtener de la siguiente manera: En el programa Cymdist se realizó un flujo de potencia completo sin considerar generación distribuida, para obtener las pérdidas totales del sistema, mientras que, en la programación matemática propuesta, al no incluir ningún generador distribuido, realiza internamente el flujo de potencia linealizado de acuerdo a las restricciones de las ecuaciones (4. 66) y (4. 67) que proviene del balance de potencia nodal P y Q.

**Tabla 5. 2.** Pérdidas totales del sistema de 13 nodos en por unidad (pu).

Sistema de Pruebas	Cymdist	Programación CVX
IEEE 13	0,5184	0,4711

### B. Perfil de tensión

En la Figura 5. 2 se muestra el perfil de tensión con el resultado de los voltajes obtenidos con el modelo matemático propuesto.



**Figura 5. 2.** Perfil de tensiones CVX.



Se presenta el perfil de tensión, donde se puede observar que las tres fases se mantienen en el límite de  $\pm 5\%$  de variación para el índice de nivel de voltaje que especifica el ARCONEL. Además, en los nodos 4 y 5 no cuenta con fase A, los nodos 7 no presenta la fase B la 8 no cuenta con fase B y C y el nodo 9 no cuenta con la fase A y B.

### C. Voltajes mínimos y máximos para el sistema de 13 nodos

En la Tabla 5. 3 se muestra los nodos donde los voltajes son mínimos y máximos para el sistema de pruebas de la IEEE 13 nodos, en referencia al modelo matemático planteado.

**Tabla 5. 3.** Voltaje máximos y mínimos caso base.

	NODOS CVX					
	Fase A	$V_{p.u.}$	Fase B	$V_{p.u.}$	Fase C	$V_{p.u.}$
$V_{m\acute{a}x}$	632	1	632	1	632	1
$V_{m\acute{i}n}$	675	0,9706	646	0,9853	611	0,9643

En la Tabla 5. 4 se muestra los nodos donde los voltajes son mínimos y máximos para el sistema de pruebas de la IEEE 13 nodos, en referencia a la simulación en Cymdist.

**Tabla 5. 4.** Voltaje máximos y mínimos caso base.

	NODOS CYMDIST					
	Fase A	$V_{p.u.}$	Fase B	$V_{p.u.}$	Fase C	$V_{p.u.}$
$V_{m\acute{a}x}$	632	1	632	1	632	1
$V_{m\acute{i}n}$	675	0,9620	646	0,9950	611	0,9580

## 5.1.2. Escenario 2: Ubicación de Generación Distribuida

### A. Resultados obtenidos

En la Tabla 5. 5 se muestra los resultados de pérdidas totales del sistema de 13 nodos del modelo matemático propuesto incluyendo la generación distribuida (GD) en los nodos 633 y

680, también se muestra los resultados obtenidos con el software cymdist, estos resultados están en kW, mientras que la Tabla 5. 6 muestra las pérdidas totales del sistema en por unidad (pu). La potencia base utilizada es de 1 MVA. En la Figura B. 1 se muestra el diagrama de la IEEE 13 nodos señalado donde se encuentra la (GD).

**Tabla 5. 5.** Pérdidas totales del sistema de 13 nodos en kW.

Sistema de Pruebas	Cymdist	Programación CVX
IEEE 13	29,46	26,2920

Las pérdidas totales del sistema con respecto al modelo matemático y utilizando generación distribuida tienen una diferencia de 3,166 kW esta diferencia es producto de la optimización realizada con la función CVX y al solver SeDuMi del software Matlab.

En la Tabla 5. 5 los resultados que se obtuvieron con la inyección de la generación distribuida en los nodos 633 y 680 haciendo una comparación con los resultados totales del caso base cuyos resultados se encuentran en la Tabla 5. 1 se puede apreciar que existe una disminución notable 20,818 kW de las pérdidas totales con la programación de CVX mientras que con el software Cymdist se obtiene una diferencia de 22,38 kW de las pérdidas totales del sistema del sistema de pruebas de la IEEE de 13 nodos mejorando así el perfil de tensiones.

**Tabla 5. 6** Pérdidas totales del sistema de 13 nodos en por unidad (pu).

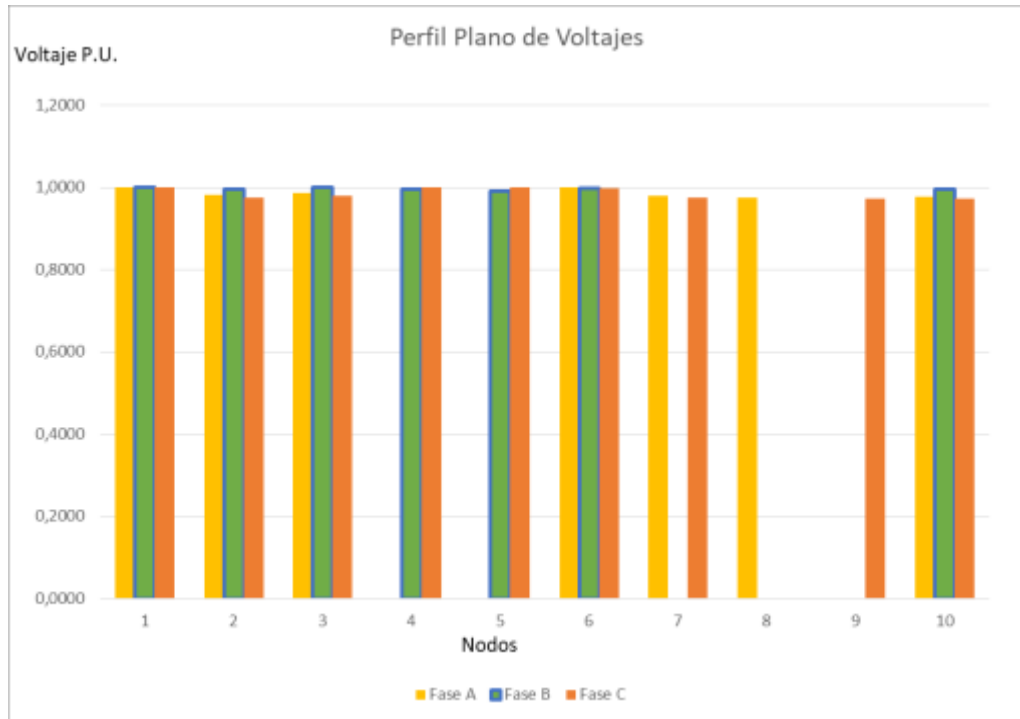
Sistema de Pruebas	Cymdist	Programación CVX
IEEE 13	0,2946	0, 262920

**Tabla 5. 7.** Datos de las potencias de generación distribuida en cada fase.

NODO	Nodo 680									Nodo 633								
	FASE A			FASE B			FASE C			FASE A			FASE B			FASE C		
	P	Q	Fp	P	Q	Fp	P	Q	Fp	P	Q	Fp	P	Q	Fp	P	Q	Fp
POTENCIA	(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)	
GD 1	300	100	94,87	300	85	94,87	300	100	94,87									
GD 2										160	98,9	85,06	300	100	94,87	2,7	0,2	99,7

### B. Perfil de tensión

En la Figura 5. 3 se muestra el perfil de tensión con el resultado de los voltajes obtenidos del modelo matemático propuesto incluyendo la generación distribuida (GD).



**Figura 5. 3.** Perfil de tensiones CVX incluyendo GD.

### C. Voltajes máximos y mínimos para el sistema de 13 nodos

En la Tabla 5. 8 se muestra los nodos donde los voltajes son mínimos y máximos para el sistema de pruebas de la IEEE 13 nodos, estos resultados ya incluyen generación distribuida y son tomados del modelo matemático planteado.

**Tabla 5. 8.** Voltajes máximos y mínimos con generación distribuida.

	NODOS CVX					
	Fase A	$V_{p.u.}$	Fase B	$V_{p.u.}$	Fase C	$V_{p.u.}$
$V_{máx}$	632	1	632	1	632	1
$V_{mín}$	652	0,9747	646	0,9922	611	0,9721

En la Tabla 5. 9 se muestra los nodos donde los voltajes son mínimos y máximos para el sistema de pruebas de la IEEE 13 nodos, estos resultados ya incluyen generación distribuida y son tomados de la simulación de Cymdist.

**Tabla 5. 9.** Voltajes máximos y mínimos con generación distribuida.

	NODOS CYMDIST					
	Fase A	$V_{p.u.}$	Fase B	$V_{p.u.}$	Fase C	$V_{p.u.}$
$V_{m\acute{a}x}$	632	1	632	1	632	1
$V_{m\grave{i}n}$	652	0,9740	646	0,9950	611	0,9690

En la Tabla 5. 8 se muestra los niveles de voltaje en por unidad (pu), que presentan el modelo CVX, inyectando dos generaciones distribuidas para cada fase en los nodos 680 y 633 se puede observar una mejoría en los voltajes con un incremento del 0,0041 (pu) en la fase A, 0.0069 (pu) en la fase B y 0.0078 (pu) en la fase C, obteniendo un sistema más eficiente.

En la Tabla 5. 9 se muestra los voltajes en (pu) obtenidos de la simulación en cymdist, obtenido como resultado en la fase A de 0,012 (pu), en la fase B de 0 (pu), y en la fase C de 0,011 (pu), mejorando el perfil de tensión.

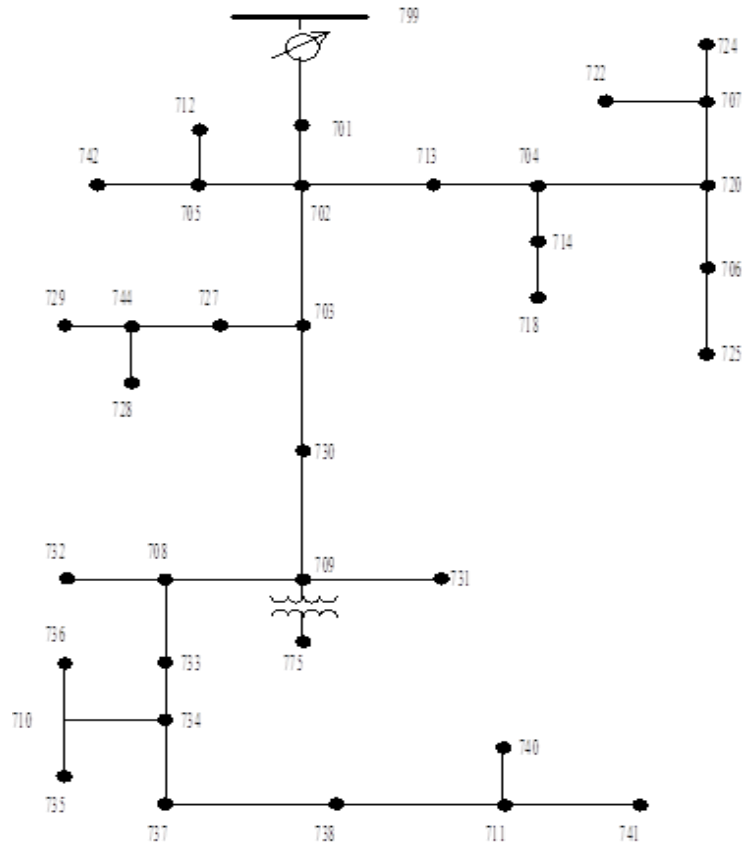
## 5.2. COMPARACIÓN DEL MÉTODO UTILIZANDO EL SISTEMAS DE PRUEBAS DE LA IEEE 37 NODOS

Para el análisis del caso base se procede a implementa en el software Cymdist y se realiza una comparación con la programación del modelo matemático realizado. Para este caso los datos iniciales no incluyen generación distribuida para ningún sistema de prueba.

### 5.2.1. Caso Base

En la Figura 5. 4 se muestra la topología del sistema de pruebas de la IEEE 37 nodos trifásico desbalanceado, donde la demanda activa total de la fase A=727 kW, fase B= 639 kW y fase C= 1091kW. De la misma manera la demanda reactiva total de la fase A= 357 kVAr, fase B=314 kVAr y fase C= 530 kVAr, estos son los valores picos de las demandas tomadas en un hora determinada, además este sistema cuenta con una subestación de 230kv/4.8kv con una potencia

de 2500 kVA, el tipo de carga existente en este circuito es de potencia constante kW-kVAr, impedancia constante  $Z$  y corriente constante  $I$ .



**Figura 5. 4.** Esquema de pruebas del sistema de pruebas IEEE 37 [30].

Para el análisis del sistema de 37 nodos, se toma como barra slack al nodo 701, y no se considera el regulador de voltaje. Además, los datos de las líneas, transformador, así como las cargas se encuentran en el anexo A.2.

### 5.2.2. Escenario 1: Caso Base sin Generación Distribuida

Para el análisis se determinó las pérdidas totales de la red sin considerar ningún generador en el sistema, donde los resultados son los mostrados en la Tabla 5. 10, que están expresados en kW, mientras que la Tabla 5. 11, muestra los resultados en por unidad (pu) con una base de 1MW.

**Tabla 5. 10.** Pérdidas totales del sistema de 37 nodos en kW.

<b>Sistema de Pruebas</b>	<b>Cymdist</b>	<b>Programación CVX</b>
IEEE 37	33,64	31,46

Las pérdidas totales del sistema con respecto al modelo matemático tienen una diferencia de 2,18 kW, esta diferencia es debido a la linealización que se realizó para obtener el modelo de optimización cuadrática, sin embargo, el programa Cymdist utiliza el método de Newton Raphson completo para el desarrollo flujos de potencia.

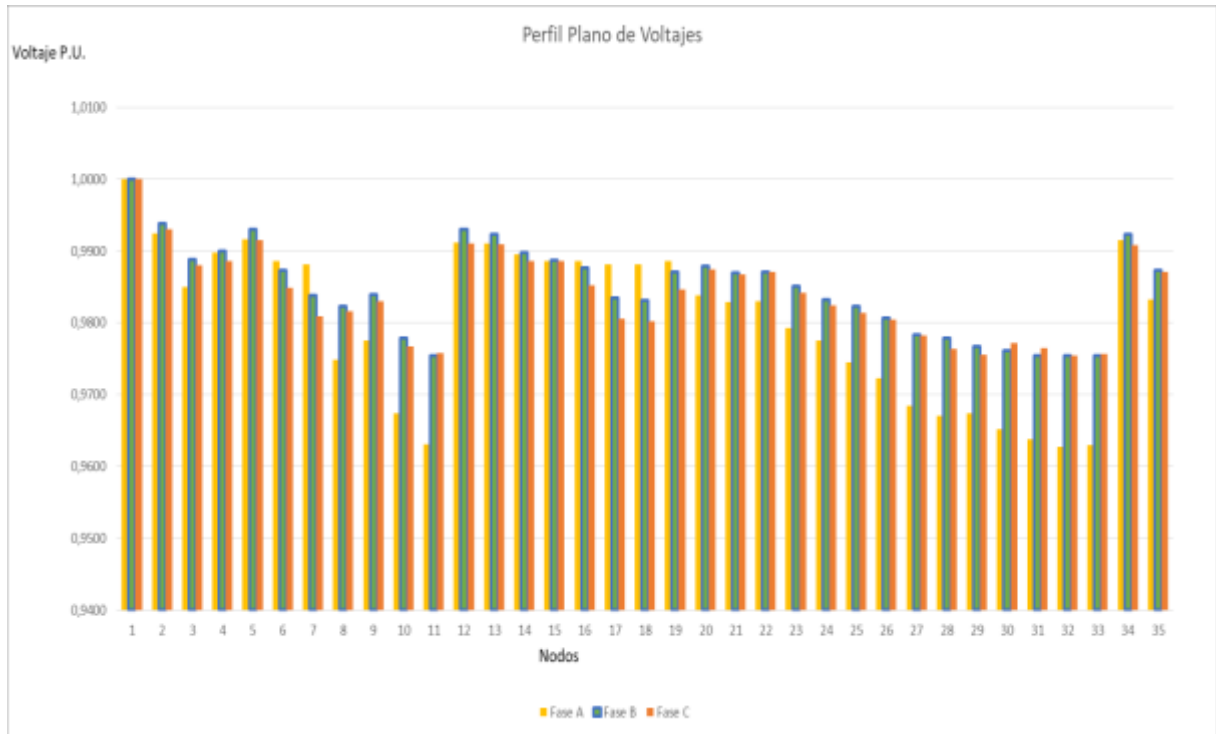
Los resultados se procedieron a obtener de la siguiente manera: En el programa Cymdist se realizó un flujo de potencia completo sin considerar generación distribuida, para obtener las pérdidas totales del sistema, mientras que, en la programación del modelo matemático propuesto, al no incluir ningún generador distribuido realiza internamente el flujo de potencia linealizado de acuerdo a las restricciones de las ecuaciones (4. 66) y (4. 67) que proviene del balance de potencia nodal P y Q.

**Tabla 5. 11.** Pérdidas totales del sistema de 37 nodos en por unidad (pu).

<b>Sistema de Pruebas</b>	<b>Cymdist</b>	<b>Programación CVX</b>
IEEE 37	0,03364	0,03146

### **A. Perfil de tensión**

En la Figura 5. 5 se muestra el perfil de tensión con el resultado de los voltajes obtenidos con el modelo matemático propuesto.



**Figura 5. 5.** Perfil de tensiones CVX, caso IEEE 37 nodos.

En la Figura 5. 5 se presenta el perfil de tensión, donde se puede observar que las tres fases se mantienen en el límite de  $\pm 5\%$  de variación para el índice de nivel de voltaje que especifica el ARCONEL.

**B. Voltajes mínimos y máximos del sistema de 37 nodos**

En la Tabla 5. 12. se muestra los nodos donde los voltajes son mínimos y máximos para el sistema de pruebas de la IEEE 37 nodos, en referencia al modelo matemático planteado.

**Tabla 5. 12.** Voltaje máximos y mínimos caso base IEEE 37 nodos.

	NODOS CVX					
	Fase A	$V_{p.u.}$	Fase B	$V_{p.u.}$	Fase C	$V_{p.u.}$
$V_{m\acute{a}x}$	701	1	701	1	701	1
$V_{m\grave{i}n}$	740	0,9627	740	0,9755	740	0,9754



**Tabla 5. 13.** Voltaje máximos y mínimos caso base IEEE 37 nodos.

	NODOS CYMDIST					
	Fase A	$V_{p.u.}$	Fase B	$V_{p.u.}$	Fase C	$V_{p.u.}$
$V_{máx}$	701	1	701	1	701	1
$V_{min}$	740	0,971	740	0,971	740	0,971

### 5.2.3. Escenario 2: Ubicación de Generación Distribuida

#### A. Resultados obtenidos

En la Tabla 5. 14. se muestra los resultados de pérdidas totales del sistema de 37 nodos del modelo matemático propuesto, incluyendo la generación distribuida (GD) que se encuentra colocadas en los nodos 711 y 703, también se muestra los resultados obtenidos con el software cymdist, estos resultados están en kW, mientras que la

Tabla 5. 15. muestra las pérdidas totales del sistema en por unidad (pu). La potencia base utilizada es de 1 MVA, en la Figura B. 2 se muestra el diagrama de la IEEE 37 nodos indicando la ubicación de la (GD).

**Tabla 5. 14.** Pérdidas totales del sistema de 37 nodos en kW.

Sistema de Pruebas	Cymdist	Programación CVX
IEEE 37	9,95	7,7175

Las pérdidas totales del sistema con respecto al modelo matemático y utilizando generación distribuida tienen una diferencia de 2,2325 kW esta diferencia es producto de la optimización realizada con la función CVX del software Matlab.

En la Tabla 5. 14 los resultados que se obtuvieron con la inyección de la generación distribuida en los nodos 711 y 703, haciendo una comparación con los resultados totales del caso base cuyos resultados se encuentran en la Tabla 5. 10. se puede apreciar que existe una disminución notable de 23,7425 kW de las pérdidas totales con la programación de CVX mientras que con el software Cymdist se obtiene una diferencia de 23,69 kW de las pérdidas totales del sistema de pruebas de la IEEE de 37 nodos mejorando así el perfil de tensión.

**Tabla 5. 15.** Pérdidas totales del sistema de 37 nodos en por unidad (pu).

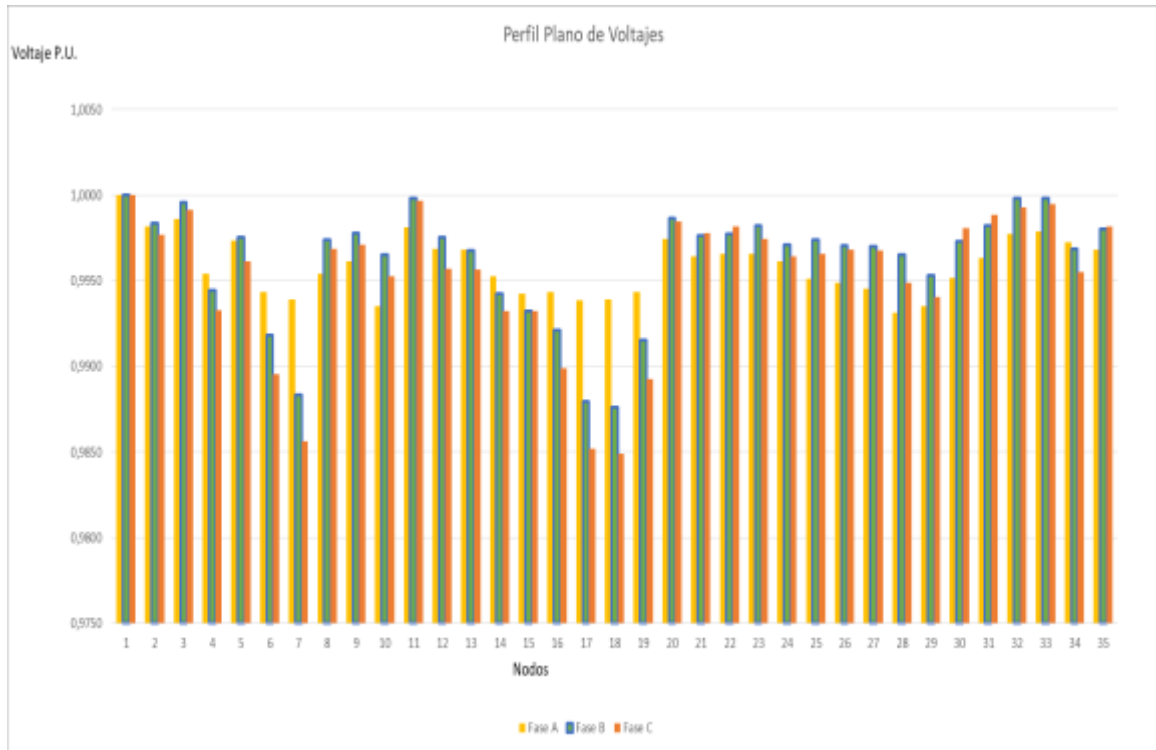
Sistema de Pruebas	Cymdist	Programación CVX
IEEE 37	0,0995	0,077175

**Tabla 5. 16.** Datos de las potencias de generación distribuida en cada fase.

NODO	Nodo 711									Nodo 703								
	FASE A			FASE B			FASE C			FASE A			FASE B			FASE C		
POTENCIA	P	Q	Fp	P	Q	Fp	P	Q	Fp	P	Q	Fp	P	Q	Fp	P	Q	Fp
	(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)	
GD 1	245,6	100	92,61	149,2	79,3	88,3	138,7	75,6	87,72									
GD 2										298,3	100	94,81	265,1	99,5	93,62	297,6	99,7	94,82

**B. Perfil de tensión**

En la Figura 5. 6 se muestra el perfil de tensión, resultado de los voltajes obtenidos del modelo matemático propuesto incluyendo la generación distribuida (GD).



**Figura 5. 6.** Perfil de tensiones en CVX inyectando GD.

**C. Voltajes mínimos y máximos del sistema de 37 nodos**

En la Tabla 5. 17. se muestra los nodos donde los voltajes son mínimos y máximos para el sistema de pruebas de la IEEE 37 nodos, estos resultados ya incluyen generación distribuida y son tomados del modelo matemático planteado.

**Tabla 5. 17.** Voltaje máximos y mínimos con generación distribuida.

	NODOS CVX					
	Fase A	$V_{p.u.}$	Fase B	$V_{p.u.}$	Fase C	$V_{p.u.}$
$V_{máx}$	701	1	701	1	701	1
$V_{min}$	735	0,9931	724	0,9876	724	0,9849

**Tabla 5. 18.** Voltaje máximos y mínimos con generación distribuida.

	NODOS CYMDIST					
	Fase A	$V_{p.u.}$	Fase B	$V_{p.u.}$	Fase C	$V_{p.u.}$
$V_{máx}$	701	1	701	1	701	1
$V_{min}$	735	0,995	724	0,989	724	0,989

En la Tabla 5. 17. se muestra los niveles de voltaje en por unidad (pu), que presentan el modelo matemático optimizado con CVX, inyectando dos generaciones distribuidas para cada fase en los nodos 711 y 703 se puede observar una mejoría en los voltajes con un incremento del 0,0304 (pu) en la fase A, 0,0121 (pu) en la fase B y 0,0095 (pu) en la fase C. Obteniendo de esta manera un sistema más eficiente.

En la Tabla 5. 18 se muestra los voltajes en (pu) obtenidos de la simulación en cymdist, obtenido como resultado en la fase A de 0,0323 (pu), en la fase B de 0,0135 (pu), y en la fase C de 0,0136 (pu), mejorando el perfil de tensión.

### 5.3. COMPARACIÓN DEL MÉTODO UTILIZANDO EL SISTEMAS DE PRUEBAS DE LA IEEE 123 NODOS

#### 5.3.1. Escenario 1: Caso Base sin Generación Distribuida

En la Figura 5. 7 se muestra la topología del sistema de pruebas del IEEE 123 nodos trifásico desbalanceado, donde la demanda activa total de la fase A=1420 kW, fase B= 915 kW y fase C= 1155kW así como también la demanda reactiva total de la fase A= 775 kVAr, fase B=515 kVAr y fase C= 635 kVAr, estos son los valores picos de las demandas tomadas en una hora determinada, además este sistema cuenta con una subestación de 115kv/4.16kv con una potencia de 5000 kVA, el tipo de carga existente en este circuito es de potencia constante kW-kVAr, impedancia constante Z y corriente constante I.

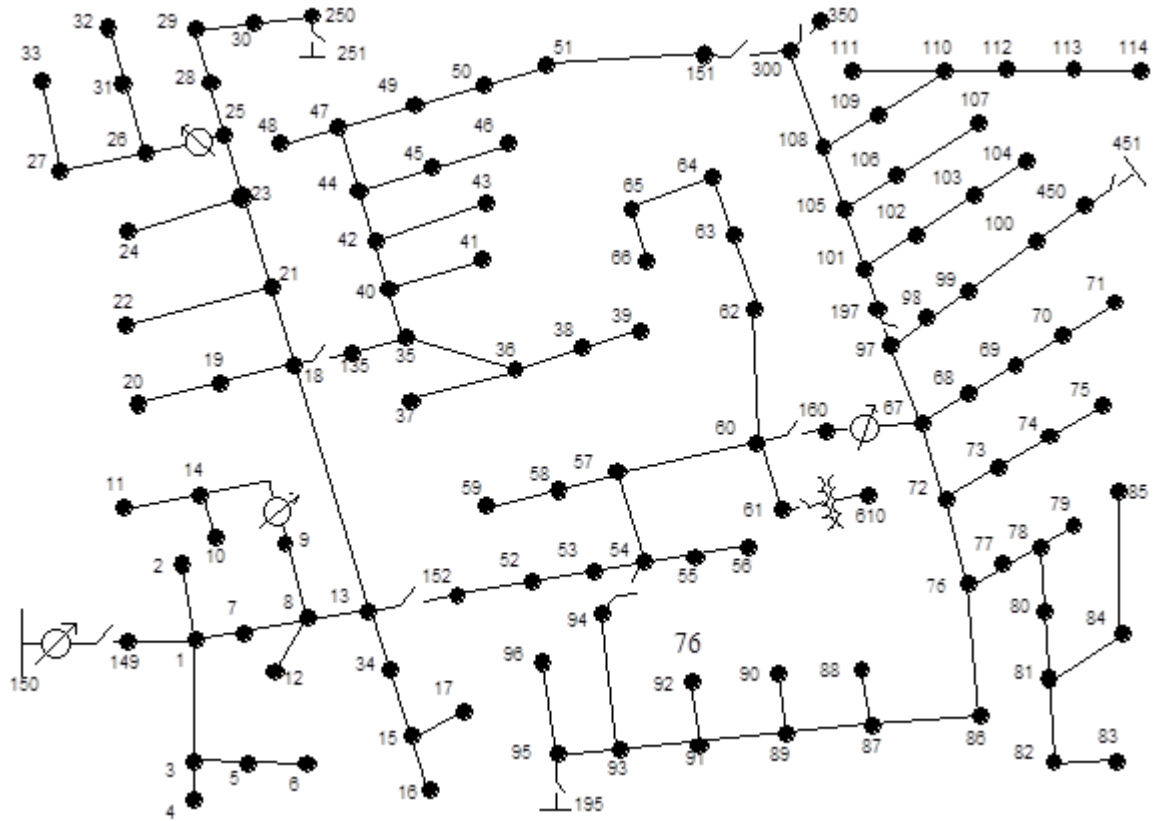


Figura 5. 7. Esquema de pruebas del sistema de pruebas IEEE 123 [30].

Para el análisis se toma como barra slack al nodo 149, y no se considera el regulador de voltaje, además los datos de las líneas, transformador, así como las cargas se encuentran en el anexo A.3.

### A. Resultados obtenidos

Para el análisis se determinó las pérdidas totales de la red sin considerar ningún generador en el sistema, donde los resultados son los mostrados en la Tabla 5. 19, que están expresados en kW y en la Tabla 5. 20 se presenta los resultados en por unidad (pu) con una base de 1MW.

Tabla 5. 19. Pérdidas totales del sistema de 123 nodos en kW.

Sistema de Pruebas	Cymdist	Programación CVX
IEEE 123	87,06	95,5717

Las pérdidas totales del sistema con respecto al modelo matemático tienen una diferencia de 8,5117 kW, esta diferencia es debido a la linealización que se realizó para obtener el modelo de optimización cuadrática, sin embargo, el programa Cymdist utiliza el método de Newton Raphson completo.

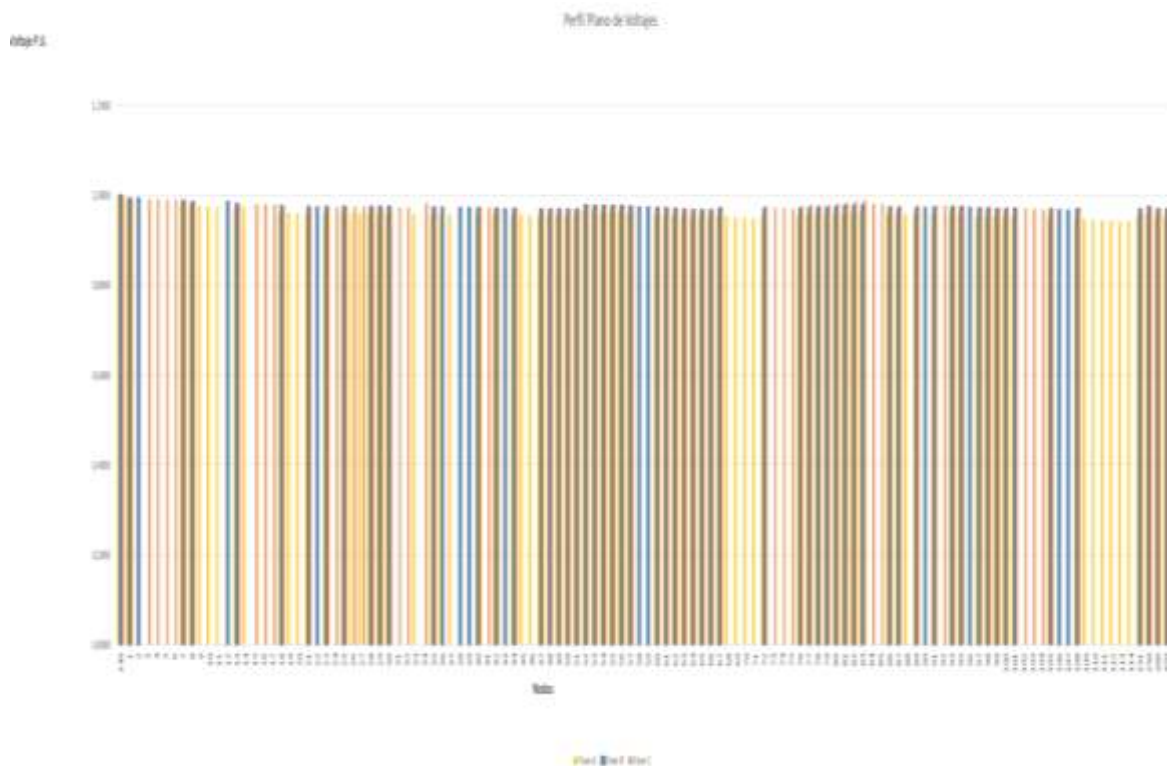
Estos resultados se procedieron a obtener de la siguiente manera: En el programa Cymdist se realizó un flujo de potencia completo sin considerar generación distribuida, para obtener las pérdidas totales del sistema, mientras que, en la programación matemática propuesto, al no incluir ningún generador distribuido realiza internamente el flujo de potencia linealizado de acuerdo a las restricciones de las ecuaciones (4. 66) y (4. 67) que proviene del balance de potencia nodal P y Q.

**Tabla 5. 20.** Pérdidas totales del sistema de 123 nodos en por unidad (pu).

<b>Sistema de Pruebas</b>	<b>Cymdist</b>	<b>Programación CVX</b>
IEEE 123	0,08706	0,0955717

## **B. Perfil de tensión**

En la Figura 5. 8 se muestra el perfil de tensión con el resultado de los voltajes obtenidos con el modelo matemático propuesto.



**Figura 5. 8.** Perfil de tensiones CVX

En la Figura 5. 8 se presenta el perfil de voltajes, donde se puede observar que las tres fases se mantienen en el límite de  $\pm 5\%$  de variación para el índice de nivel de voltaje que especifica el ARCONEL.

### C. Voltajes mínimos y máximos del sistema de 123 nodos

En la Tabla 5. 21 se muestra los nodos donde los voltajes son mínimos y máximos para el sistema de pruebas de la IEEE 123 nodos, en referencia al modelo matemático planteado.

**Tabla 5. 21.** Voltajes máximos y mínimos caso base.

	NODOS CVX					
	Fase A	$V_{p.u.}$	Fase B	$V_{p.u.}$	Fase C	$V_{p.u.}$
$V_{m\acute{a}x}$	149	1	149	1	149	1
$V_{m\acute{i}n}$	114	0,9423	107	0,9662	66	0,9671

**Tabla 5. 22.** Voltajes máximos y mínimos caso base.

	NODOS CYMDIST					
	Fase A	$V_{p.u.}$	Fase B	$V_{p.u.}$	Fase C	$V_{p.u.}$
$V_{m\acute{a}x}$	149	1	149	1	149	1
$V_{m\acute{i}n}$	114	0,983	107	0,984	66	0,958

### 5.3.2. Escenario 2: Ubicación de Generación Distribuida

#### A. Resultados obtenidos

En la Tabla 5. 23 se muestra los resultados de pérdidas totales del sistema de 123 nodos del modelo matemático propuesto incluyendo la generación distribuida (GD) en los nodos 62 y 47, también se muestra los resultados obtenidos con el software Cymdist, estos resultados están en kW, mientras que la Tabla 5. 24 muestra las pérdidas totales del sistema en por unidad (pu). La potencia base utilizada es de 1 MVA. En la Figura B. 3 se presenta el diagrama de la IEEE indicando donde se encuentra la (GD).

**Tabla 5. 23.** Pérdidas totales del sistema de 123 nodos en kW.

Sistema de Pruebas	Cymdist	Programación CVX
IEEE 123	55,4031	29,38

Las pérdidas totales del sistema con respecto al modelo matemático y utilizando generación distribuida tienen una diferencia de 26,0231 kW esta diferencia es producto de la optimización realizada con la función CVX del software Matlab.

En la Tabla 5. 23 los resultados que se obtuvieron con la inyección de la generación distribuida en los nodos 62 y 47, haciendo una comparación con los resultados totales del caso base cuyos resultados se encuentran en la Tabla 5. 19 se puede apreciar que existe una disminución notable 40,1686 kW de las pérdidas totales con la programación de CVX mientras que con el software Cymdist se obtiene una diferencia de 57,68 kW de las pérdidas totales del sistema de pruebas de la IEEE de 123 nodos mejorando así la curva de voltajes.



**Tabla 5. 24.** Pérdidas totales del sistema de 123 nodos en por unidad (pu).

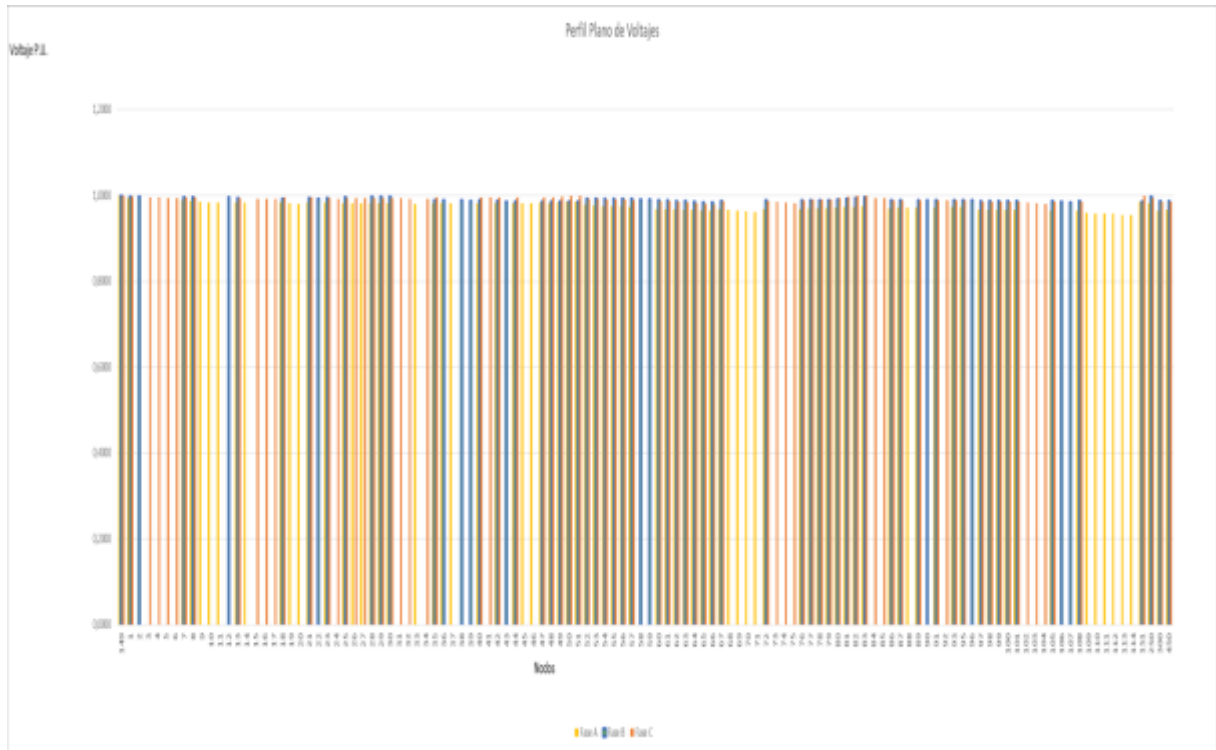
Sistema de Pruebas	Cymdist	Programación CVX
IEEE 123	0,2938	0,55031

**Tabla 5. 25.** Datos de las potencias de generación distribuida en cada fase.

NODO	Nodo 62									Nodo 47								
	FASE A			FASE B			FASE C			FASE A			FASE B			FASE C		
POTENCIA	P	Q	Fp	P	Q	Fp	P	Q	Fp	P	Q	Fp	P	Q	Fp	P	Q	Fp
	(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)		(kW)	(kVAr)	
GD 1	300	100	94,37	247,8	86,8	94,37	300	99,8	94,88									
GD 2										300	99,9	94,87	300	99,7	94,89	300	52,7	98,49

### B. Perfil de tensión

En la Figura 5. 9 se muestra el perfil de tensión con el resultado de los voltajes obtenidos del modelo matemático propuesto incluyendo la generación distribuida (GD).



**Figura 5. 9.** Perfil tensiones CVX incluyendo GD.

### C. Voltajes mínimos y máximos del sistema de 123 nodos

En la Tabla 5. 26 se muestra los nodos donde los voltajes son mínimos y máximos para el sistema de pruebas de la IEEE 123 nodos, estos resultados ya incluyen generación distribuida y son tomados del modelo matemático planteado.

**Tabla 5. 26.** Voltajes máximos y mínimos con generación distribuida.

	NODOS CVX					
	Fase A	$V_{p.u.}$	Fase B	$V_{p.u.}$	Fase C	$V_{p.u.}$
$V_{m\acute{a}x}$	149	1	149	1	149	1
$V_{m\acute{i}n}$	114	0,9549	107	0,9844	66	0,9787

**Tabla 5. 27.** Voltajes máximos y mínimos con generación distribuida.

<b>NODOS CYMDIST</b>						
	<b>Fase A</b>	<b><math>V_{p.u.}</math></b>	<b>Fase B</b>	<b><math>V_{p.u.}</math></b>	<b>Fase C</b>	<b><math>V_{p.u.}</math></b>
<b><math>V_{m\acute{a}x}</math></b>	149	1	149	1	149	1
<b><math>V_{m\acute{i}n}</math></b>	114	1,010	107	1,000	66	0,982

En la Tabla 5. 26 se muestra los niveles de voltaje en por unidad (pu), que presentan el modelo CVX inyectando dos generaciones distribuidas para cada fase en los nodos 62 y 47 se puede observar una mejoría en los voltajes con un incremento del 0,011 (pu) en la fase A, 0,0116 (pu) en la fase B y 0,0112 (pu) en la fase C, obteniendo un sistema más eficiente.

En la Tabla 5. 27 se muestra los voltajes en (pu) obtenidos de la simulación en cymdist, obtenido como resultado en la fase A de 0,027 (pu), en la fase B de 0,0156(pu), y en la fase C de 0,024 (pu), mejorando el perfil de tensión.

## 6. CONCLUSIONES DEL PROYECTO

### 6.1. CONCLUSIONES

Al investigar en diferentes fuentes bibliográficas, sobre el OPF en redes eléctricas trifásicas desbalanceadas en sistemas de distribución, se han encontrado algunas metodologías que se implementan para dar solución al flujo óptimo de potencia y cumplir con la finalidad de reducir pérdidas de potencia. Tales como, programación no lineal con variables continuas, programación lineal entera mixta, programación no lineal entera mixta, programación entera mixta y algoritmos metaheurísticos, que utilizan para resolver diferentes problemas de optimización aplicados a los sistemas eléctricos, sin embargo, en la literatura científica se encuentra la programación no lineal para minimizar pérdidas de la red debido a las restricciones de balance de potencia.

Para el desarrollo del modelo matemático propuesto de aproximación cuadrática para el flujo óptimo de potencia en redes de distribución trifásicas desbalanceadas en primera instancia se identificó las propiedades. En el modelo matemático desarrollado, la función objetivo es cuadrática y es convexa, las restricciones de balance de potencia activa y reactiva son no lineales, por lo que se utilizó las condiciones de Cauchy Reaman para ver si la función es analítica donde resultó que es no holomorfa, permitiendo linealizar alrededor de 1 en por unidad usando las series de Taylor en el plano complejo, para de esta manera obtener la programación cuadrática linealizada.

Una vez determinado y planteado el modelo matemático de aproximación cuadrática convexa, se procede a implementar el algoritmo de programación, rigiéndose en la función objetivo enfocada en minimizar las pérdidas de potencia, en el software Matlab con la ayuda de la función CVX, ya que es un optimizador para resolver problemas lineales y convexos. De esta manera, se procedió a probar en el sistema de la IEEE de 13 nodos, donde las pérdidas totales del sistema fueron de 4,73 kW. También se procedió a colocar dos generadores distribuidos en los nodos 680 y 633 donde las pérdidas totales del sistema son 3,166 kW lo cual se puede observar que con la generación distribuida se logró minimizar a 1,564kW. Para el sistema de la IEEE de 37 de nodos las pérdidas totales del sistema son de 31,46kW y al colocar dos generadores distribuidos se obtiene un total de pérdidas de 7,71kW logrando optimizar al sistema. De igual forma se procedió hacer con el sistema de prueba de la IEEE de 123 nodos

dando como resultado unas pérdidas de 95,5717kW y al colocar dos generadores distribuidos se obtuvo unas pérdidas de 55,40kW.

## **6.2. RECOMENDACIONES**

Del análisis realizado en la presente tesis, se puede recomendar lo siguiente para futuros trabajos:

Realizar el desarrollo de un modelo matemático mediante una aproximación convexa cúbica para futuras investigaciones, con el fin de llegar a establecer que modelo es más eficiente entre la cuadrática y la cubica para resolver flujos óptimos de potencia en redes de distribución.

Se puede incluir una función objetiva al modelo matemático, para encontrar la ubicación óptima para la colocación de los generadores distribuidos.

Estudiar los flujos óptimos de potencia, para lo cual se puede plantear una función objetiva que considere los costos que implica el uso de generación distribuida en redes de distribución.

Además de la generación distribuida se puede incluir más variables de control entre ellos transformadores, reguladores de voltajes, conexión de capacitores, entre otros.

**7. BIBLIOGRAFÍA**

- [1] O. Montoya Giraldo, W. Gil González, and A. Garcés Ruiz, “Flujo de potencia óptimo para redes radiales y enmalladas empleando programación semidefinida,” *TecnoLógicas*, vol. 20, no. 40, pp. 29–42, 2017, doi: 10.22430/22565337.703.
- [2] J. M. Lezama Lopez and L. A. Pareja Gallego, “Flujo de potencia optimo usando el metodo del gradiente para reduccion de perdidas en sistemas de potencia,” *Ing. y Cienc.*, 2016.
- [3] Restrepo Cardona Laura, “Aproximación cuadrática al flujo de carga óptimo en sistemas de distribución considerando generación distribuida,” p. 50, 2016.
- [4] A. Garces, “A quadratic approximation for the optimal power flow in power distribution systems,” *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 130, pp. 222–229, 2016, doi: 10.1016/j.epsr.2015.09.006.
- [5] S. Ramírez Castaño, *REDES DE DISTRIBUCIÓN DE ENERGÍA*, Centro de. Colombia, 2004.
- [6] S. F. J. Bautista, “Tesis Desarrollo De Un Algoritmo De Interrelación Para Microredes De Distribución Eléctrica,” 2015.
- [7] J. Izquierdo Franco, “Estudio De Flujos De Potencia Y Analisis De Fallas En Sistemas Electricos De Distribucion Radial,” p. 150, 2002, [Online]. Available: <http://eprints.uanl.mx/5155/1/1020147516.PDF>.
- [8] J. M. Garcia Martinez, “Análisis de sistemas desbalanceados para el diseño y operación de redes eléctricas,” *Tesis*, pp. 1–30, 1989, [Online]. Available: <http://eprints.uanl.mx/141/1/1020074575.PDF>.
- [9] C. D. VEGA GUACOLLANTES, “Formulación y simulación de flujos de potencia desbalanceados basado en una descomposición por fases,” p. 56, 2020.
- [10] J. D. Juárez Cervantes, *Sistemas de distribución de energía eléctrica*, Sans Serif., vol. 1. 2002.
- [11] Sector electricidad, “Las Pérdidas de Energía Eléctrica | Sector Electricidad | Profesionales en Ingeniería Eléctrica,” <http://www.sectorelectricidad.com/20860/las-perdidas-de-energia-electrica/>, Sep. 30, 2018. <http://www.sectorelectricidad.com/20860/las-perdidas-de-energia-electrica/> (accessed Jan. 04, 2021).
- [12] R. de Distribución, “Topologías de las Redes de Distribución :: REDES DE DISTRIBUCIÓN,” May 15, 2014. <https://distribucion.webnode.com.co/topologias-de->

- las-redes-de-distribucion/ (accessed Jan. 04, 2021).
- [13] J. Jativa, G. Constante, and G. Cabrera, “Flujo de Potencia por Newton-Raphson con el Jacobiano Calculado en las Ecuaciones de Errores de Potencia,” *Rev. EPN*, vol. 33, no. 3, p. 7, 2014, [Online]. Available: [https://revistapolitecnica.epn.edu.ec/ojs2/index.php/revista\\_politecnica2/article/view/157/pdf](https://revistapolitecnica.epn.edu.ec/ojs2/index.php/revista_politecnica2/article/view/157/pdf).
- [14] Á. Linares Bravo and A. F. Rios Tamayo, “SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE RESTAURACIÓN DE SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN USANDO LOS MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN METAHEURÍSTICOS RECONOCIDO SIMULADO Y BUSQUEDA TABÚ.”
- [15] L. Pavos and R. Castro, “Implementación Del Algoritmo ‘ Forward and Backward,’” vol. 1, 2017, [Online]. Available: [http://oa.upm.es/47864/1/TFG\\_LETICIA\\_PRAVOS\\_GARCIA.pdf](http://oa.upm.es/47864/1/TFG_LETICIA_PRAVOS_GARCIA.pdf).
- [16] C. López Servin, “ESTUDIO DE FLUJOS DE POTENCIA ÓPTIMOS DE C.A. EMPLENADO EL MÉTODO DE PUNTO INTERIOR,” 2016.
- [17] R. A. Gómez Vizhñay and R. H. Juca Sáenz, “Proceso Para El Modelamiento Y Simulación De Flujos De Carga De Las Redes De Media Y Baja Tensión De La Empresa Eléctrica Regional Centro Sur C.A.,” 2017.
- [18] A. Torres Martínez, “Series de Taylor y Series de Fourier: Un Estudio Comparativo,” 2015.
- [19] R. Walter, “Teorema de Taylor,” vol. tercer, p. 416, 1987, [Online]. Available: [https://es.qaz.wiki/wiki/Taylor%27s\\_theorem#Taylor's\\_theorem\\_in\\_complex\\_analysis](https://es.qaz.wiki/wiki/Taylor%27s_theorem#Taylor's_theorem_in_complex_analysis).
- [20] I. J. Sacerdoti, “Análisis de Funciones de Variable Compleja,” pp. 1–109, 2005.
- [21] E. S. Modelado, “FUNCIONES POLINOMIALES Y REALES.”
- [22] M. L. Quezada Lucas, “Modelos De Carga Y Sus Efectos En Estudios Al Sing,” 2013.
- [23] K. P. Tapasco Suárez, “Aproximaciones al Flujo de Carga en Sistemas de Distribución,” p. 50, 2017.
- [24] M. C. Grant and S. P. Boyd, “The CVX Users ’ Guide, Release 2.0,” vol. 0, 2013.
- [25] D. Peaucelle -Didier, H.-Y. Labit, and K. Taitz, “User’s Guide for SEDUMI INTERFACE 1.04,” 2002.
- [26] EMILIO MEJÍA, “Herramientas de optimización convexa y aplicaciones en telecomunicaciones,” *Univ. Carlos III Madrid. Dep. Teoría la Señal y Comun.*, p. 260,

- 2011.
- [27] “CYME - Software, Análisis de sistemas de distribución.”  
<https://www.cyme.com/es/software/cymdist/> (accessed Jul. 22, 2021).
- [28] T. Chunchu and G. Gabriela, “Universidad técnica de cotopaxi,” 2020.
- [29] A. Garces, “A Linear Three-Phase Load Flow for Power Distribution Systems,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 31, no. 1, pp. 827–828, 2016, doi: 10.1109/TPWRS.2015.2394296.
- [30] “Recursos | Alimentador de prueba PES.” <https://site.ieee.org/pes-testfeeders/resources/> (accessed Jul. 22, 2021).



**8. ANEXOS****Anexo A. Tablas de datos del sistema de prueba IEEE****Tabla A. 1.** Datos del Sistema de Prueba IEEE 13 nodos.

Nodo envió IEEE	Nodo Recibo IEEE	Nodo envió renumerado	Nodo Recibo renumerado	R (pu)	X (pu)	B (pu)	P <sub>A</sub>	Q <sub>A</sub>	P <sub>B</sub>	Q <sub>B</sub>	P <sub>C</sub>	Q <sub>C</sub>	GD	ALPHA
632	645	1	4	0,0184	0,0145	1,53E-08	0,16	0,11	0,12	0,09	0,12	0,09	0	0
632	633	1	6	0,0097	0,0124	1,80E-08	0	0	0,17	0,125	0	0	0	0
645	646	4	5	0,011	0,0087	9,19E-07	0	0	0,23	0,132	0	0	0	2
684	632	7	8	0,0356	0,0134	3,89E-09	0,128	0,086	0	0	0	0	0	2
632	671	1	2	0,0122	0,0391	7,97E-08	0,402	0,23	0,451	0,258	0,672	0,439	0	0
671	684	2	7	0,0111	0,0087	9,19E-07	0,485	-0,01	0,068	-0,14	0,29	0,012	0	0
671	680	2	3	0,0061	0,0195	3,99E-09	0	0	0	0	0,17	-0,02	0	1
684	611	7	9	0,013	0,0132	7,41E-07	0	0	0,23	0,132	0	0	0	0
692	675	2	10	0,008	0,0068	2,63E-07	0,128	0,086	0	0	0	0	0	0

**Tabla A. 2.** Datos del Sistema de Prueba IEEE 37 nodos.

Nodo envió IEEE	Nodo Recibo IEEE	Nodo envió renumerado	Nodo Recibo renumerado	R (pu)	X (pu)	B (pu)	P <sub>A</sub>	Q <sub>A</sub>	P <sub>B</sub>	Q <sub>B</sub>	P <sub>C</sub>	Q <sub>C</sub>	GD	ALPHA
701	702	1	2	0,0074	0,0077	8,92E-05	0,14	0,07	0,14	0,07	0,35	0,175	0	0
702	705	2	5	0,0156	0,005	1,75E-05	0	0	0	0	0,085	0,04	0	0
702	713	2	13	0,0072	0,0041	1,99E-05	0	0	0	0	0,085	0,04	0	2
702	703	2	3	0,0103	0,0103	1,23E-04	17	0,008	0,21	0,01	0	0	0	0
703	727	3	20	0,0093	0,003	1,05E-05	0,085	0,04	0	0	0	0	0	2
703	730	3	23	0,0121	0,0069	3,26E-05	0	0	0	0	0,085	0,04	0	0
704	714	4	14	0,0031	0,001	3,50E-05	0	0	0,14	0,07	0,021	0,01	0	0
704	720	4	16	0,0161	0,0092	4,35E-06	0	0	0,042	0,021	0	0	0	1
705	742	5	34	0,0125	0,004	1,40E-05	0	0	0,042	0,021	0	0	0	0
705	712	5	12	0,0093	0,003	1,05E-05	0	0	0	0	0,042	0,021	0	0
706	725	6	19	0,0109	0,0035	1,22E-05	0,042	0,021	0,042	0,021	0,042	0,021	0	1
707	724	7	18	0,0297	0,0095	3,33E-05	0,042	0,021	0	0	0	0	0	0
707	722	7	17	0,0046	0,0015	5,25E-06	0	0	0	0	0,085	0,04	0	0
708	733	8	26	0,0064	0,0036	1,40E-05	0	0	0,085	0,04	0	0	0	0
708	732	8	25	0,0125	0,004	1,40E-05	0	0	0	0	0,042	0,021	0	0
709	731	9	24	0,0121	0,0069	3,26E-05	0,085	0,04	0	0	0	0	0	2
709	708	9	8	0,0064	0,0036	1,74E-05	0	0	0	0	0,042	0,021	0	0
710	735	10	28	0,0078	0,00251	8,76E-06	0	0	0	0	0,085	0,04	0	0

## UNIVERSIDAD TÉCNICA DE COTOPAXI – CARRERA DE ELECTRICIDAD

**Tabla A. 3.** Continuación.

710	736	10	29	0,0501	0,0161	5,06E-05	0	0	0,042	0,021	0	0	0	1
711	741	11	33	0,008	0,0046	2,17E-05	0,14	0,07	0	0	0	0	0	1
711	740	11	32	0,0078	0,0025	8,76E-06	0,126	0,062	0	0	0	0	0	2
713	704	13	4	0,0105	0,0059	2,83E-05	0	0	0	0	0,085	0,04	0	0
714	718	14	15	0,0203	0,0065	2,27E-05	0	0	0	0	0,042	0,021	0	0
720	707	16	7	0,036	0,0115	4,03E-05	0,008	0,04	0,085	0,04	0	0	0	0
720	706	16	6	0,0121	0,0069	3,26E-05	0,042	0,021	0	0	0	0	0	0
727	744	20	35	0,0056	0,0032	1,52E-05	0,042	0,021	0	0	0	0	0	2
730	709	23	9	0,004	0,0023	1,08E-05	0	0	0	0	0,085	0,04	0	0
733	734	26	27	0,0113	0,0064	3,04E-05	0	0	0,085	0,04	0	0	0	0
734	737	27	30	0,0129	0,0073	3,48E-05	0	0	0	0	0,042	0,021	0	0
734	710	27	10	0,0203	0,0065	2,27E-05	0,085	0,04	0	0	0	0	0	1
737	738	30	31	0,008	0,0046	2,17E-05	0	0	0	0	0,042	0,021	0	0
738	711	31	11	0,008	0,0046	2,17E-05	0	0	0	0	0,085	0,04	0	0
744	728	35	21	0,0078	0,0025	8,76E-06	0	0	0,042	0,021	0	0	0	2
744	729	35	22	0,0109	0,0035	1,22E-05	0,085	0,04	0	0	0	0	0	1

**Tabla A. 4.** Datos del Sistema de Prueba IEEE 123 nodos.

Nodo envió renumerado	Nodo Recibo renumerado	R (pu)	X (pu)	B (pu)	P <sub>A</sub>	Q <sub>A</sub>	P <sub>B</sub>	Q <sub>B</sub>	P <sub>C</sub>	Q <sub>C</sub>	GD	ALPHA
149	1	0,004	0,0082	1,51E-08	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
1	2	0,0076	0,0077	4,32E-07	0	0	0,02	0,1	0	0	0	1
1	3	0,0109	0,0111	6,17E-07	0	0	0	0	0,04	0,02	0	2
3	4	0,0087	0,0088	4,94E-07	0	0	0	0	0,02	0,01	0	0
3	5	0,0141	0,0144	8,02E-07	0	0	0	0	0,04	0,02	0	0
5	6	0,0109	0,0111	6,17E-07	0,02	0,01	0	0	0	0	0	1
1	7	0,003	0,0062	1,13E-08	0,04	0,02	0	0	0	0	0	2
7	8	0,002	0,0041	7,56E-07	0,02	0,01	0	0	0	0	0	0
8	9	0,0098	0,0100	5,55E-07	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
14	10	0,0109	0,0111	6,17E-07	0	0	0,02	0,01	0	0	0	0
14	11	0,0109	0,0111	6,17E-07	0	0	0	0	0,04	0,02	0	0
8	12	0,0098	0,0100	5,55E-07	0	0	0	0	0,02	0,01	0	1
8	13	0,003	0,0062	1,13E-08	0,04	0,02	0	0	0	0	0	2
9	14	0,0185	0,0188	1,05E-08	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
34	15	0,0043	0,0044	2,47E-07	0	0	0,4	0,02	0	0	0	1
15	16	0,0163	0,0166	9,26E-07	0	0	0	0	0,04	0,02	0	2
15	17	0,0152	0,0155	8,64E-07	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
13	18	0,0082	0,0170	3,12E-08	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
18	19	0,0109	0,0111	6,17E-07	0	0	0	0	0,04	0,02	0	0
19	20	0,0141	0,0144	8,02E-07	0	0	0	0	0,02	0,01	0	1
18	21	0,003	0,0062	1,13E-08	0	0	0	0	20	0,01	0	2

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE COTOPAXI – CARRERA DE ELECTRICIDAD

**Tabla A. 5.** Continuación.

21	22	0,0229	0,0232	1,30E-08	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
21	23	0,0025	0,0051	9,45E-07	0	0	0	0	0,04	0,02	0	2
23	24	0,024	0,0243	1,36E-08	0,02	0,01	0,02	0,01	0	0	0	1
23	25	0,0027	0,0057	1,04E-08	0,04	0,01	0	0	0	0	0	0
25	26	0,0035	0,0078	1,19E-08	0	0	0,02	0,01	0	0	0	0
26	27	0,0027	0,0061	9,35E-07	0	0	0,02	0,01	0	0	0	0
25	28	0,002	0,0041	7,56E-07	0	0	0	0	0,02	0,01	0	2
28	29	0,003	0,0062	1,13E-08	0,02	0,01	0	0	0	0	0	1
29	30	0,0035	0,0072	1,32E-08	0	0	0,04	0,02	0	0	0	0
26	31	0,0098	0,0100	5,55E-07	0,02	0,01	0	0	0	0	0	1
31	32	0,0139	0,0133	7,41E-07	0,02	0,01	0	0	0	0	0	2
27	33	0,0218	0,0221	1,23E-08	0,035	0,025	0,035	0,025	0,035	0,025	0	0
13	34	0,0065	0,0066	3,70E-08	0,07	0,05	0,07	0,05	70	50	0	0
18	35	0,0037	0,0077	1,42E-08	35	25	70	0,07	0,035	0,02	0	0
35	36	0,0065	0,0145	2,21E-08	0	0	0	0	0,04	0,02	0	0
36	37	0,013	0,0133	7,41E-07	0,02	0,01	0	0	0	0	0	0
36	38	0,0109	0,0111	6,17E-07	0,04	0,02	0	0	0	0	0	2
38	39	0,0141	0,0144	8,02E-07	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
35	40	0,0025	0,0051	9,45E-07	0,02	0,01	0	0	0	0	0	1
40	41	0,0141	0,0144	8,02E-07	0	0	0,02	0,01	0	0	0	0
40	42	0,0025	0,0051	9,45E-07	0	0	0,02	0,01	0	0	0	0
42	43	0,0218	0,0221	1,23E-08	0	0	0,02	0,01	0	0	0	2
42	44	0,002	0,0041	7,56E-07	0,02	0,01	0	0	0	0	0	0
44	45	0,0087	0,0088	4,94E-07	0	0	0	0	0,04	0,02	0	1
45	46	0,0139	0,0133	7,41E-07	0,04	0,02	0	0	0	0	0	2
44	47	0,0025	0,0051	9,45E-07	0	0	0,075	0,05	0	0	0	0

## UNIVERSIDAD TÉCNICA DE COTOPAXI – CARRERA DE ELECTRICIDAD

Tabla A. 6. Continuación

47	48	0,0015	0,0031	5,67E-07	0,0525	0,0375	0,035	0,025	0,0525	0,0375	0	0
47	49	0,0025	0,0051	9,45E-07	0	0	0	0	0,075	0,035	0	0
49	50	0,0025	0,0051	9,45E-07	0,02	0,01	0	0	0	0	0	0
50	51	0,0025	0,0051	9,45E-07	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
13	52	0,004	0,0082	1,51E-08	0,02	0,01	0	0	0	0	0	0
52	53	0,002	0,0041	7,56E-07	0,04	0,02	0	0	0	0	0	2
53	54	0,0012	0,0026	4,72E-07	0	0	0	0	0,04	0,02	0	0
54	55	0,0027	0,0057	1,04E-08	0	0	0	0	0,04	0,02	0	1
55	56	0,0027	0,0057	1,04E-08	0	0	0	0	0,04	0,02	0	0
54	57	0,0035	0,0072	1,32E-08	0,0875	0,065	0,0875	0,065	0,07	0,05	0	2
57	58	0,0109	0,0111	6,17E-08	0	0	0,04	0,02	0	0	0	0
58	59	0,0109	0,0111	6,17E-07	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
57	60	0,0075	0,0154	2,83E-08	0	0	0,04	0,02	0	0	0	0
60	61	0,0055	0,0113	2,08E-08	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
60	62	0,0083	0,0040	9,18E-08	0	0	0	0	0,02	0,01	0	0
62	63	0,0058	0,0028	6,43E-08	0	0	0	0	0,02	0,01	0	0
63	64	0,0116	0,0056	1,29E-09	0	0	0	0	0,04	0,01	0	0
64	65	0,0141	0,0067	1,56E-09	0	0	0,02	0,01	0	0	0	0
65	66	0,0108	0,0052	1,19E-08	0	0	0,04	0,02	0	0	0	1
60	67	0,0035	0,0072	1,32E-08	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
67	68	0,0087	0,0088	4,94E-08	0	0	0,04	0,02	0	0	0	0
68	69	0,012	0,0122	6,79E-07	0	0	0	0	0,04	0,02	0	0
69	70	0,0141	0,0144	8,02E-07	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
70	71	0,012	0,0122	6,79E-07	0	0	0,02	0,01	0	0	0	0
67	72	0,0027	0,0057	1,04E-08	0	0	0,02	0,01	0	0	0	0
72	73	0,012	0,0122	6,79E-07	0,04	0,02	0	0	0	0	0	2

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE COTOPAXI – CARRERA DE ELECTRICIDAD

**Tabla A. 7.** Continuación.

73	74	0,0152	0,0155	8,64E-07	0	0	0,04	0,02	0	0	0	0
74	75	0,0175	0,0177	9,87E-07	0	0	0	0	0,04	0,02	0	0
72	76	0,0020	0,0041	7,56E-07	0	0	0	0	0,02	0,01	0	0
76	77	0,0040	0,0082	1,51E-07	0	0	0	0	0,04	0,02	0	0
77	78	0,0010	0,0021	3,78E-07	0	0	0	0	0,04	0,02	0	0
78	79	0,0023	0,0046	8,50E-07	0	0	0,04	0,02	0	0	0	0
78	80	0,0048	0,0098	1,79E-08	0	0	0,04	0,02	0	0	0	2
80	81	0,0048	0,0098	1,79E-08	0,04	0,02	0	0	0	0	0	2
81	82	0,0025	0,0051	9,45E-07	0,0001	0,02	0,0001	0,02	0,0001	-0,2	0	2
82	83	0,0025	0,0051	9,45E-07	0,1	0,05	0	0	0	0	0	2
81	84	0,0295	0,0299	1,67E-08	0	0	0,0001	0,05	0	0	0	0
84	85	0,0207	0,0210	1,17E-08	0	0	0	0	0,0001	-0,05	0	1
76	86	0,0070	0,0144	2,64E-08	0,02	0,01	0	0	0	0	0	2
86	87	0,0045	0,0093	1,70E-08	0,02	0,01	0	0	0	0	0	0
87	88	0,0076	0,0077	4,32E-07	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
87	89	0,0028	0,0057	1,04E-08	0,02	0,01	0	0	0	0	0	0
89	90	0,0098	0,0100	5,55E-07	0,105	0,08	0,07	0,05	0,07	0,05	0	0
89	91	0,0023	0,0046	8,50E-07	0	0	0	0,04	0,02	0	0	0
91	92	0,0131	0,0133	7,41E-07	0,04	0,02	0	0	0	0	0	2
91	93	0,0023	0,0046	8,50E-07	0	0	0	0,04	0,02	0	0	2
93	54	0,0120	0,0122	6,79E-07	0,04	0	0	0	0	0,02	0	1
93	95	0,0030	0,0062	1,13E-08	0	0	0	0	0	0,02	0	0
95	96	0,0087	0,0088	4,94E-07	0	0	0	0	0	0,04	0	0
67	97	0,0025	0,0051	9,45E-07	0	0	0,02	0,01	0	0	0	2
97	98	0,0028	0,0057	1,04E-08	0	0	0	0	0,04	0,02	0	0
98	99	0,0055	0,0113	2,08E-08	0,04	0,02	0	0	0	0	0	1

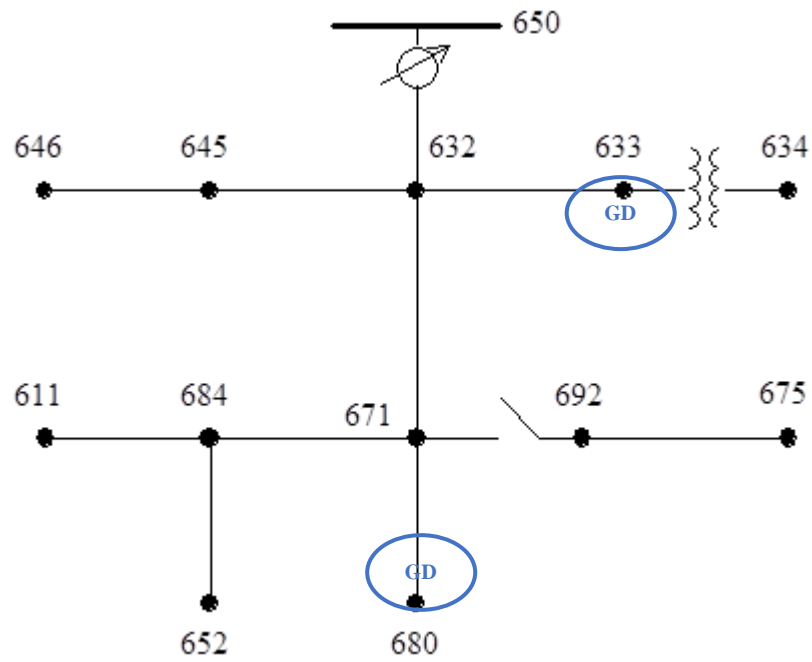
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE COTOPAXI – CARRERA DE ELECTRICIDAD

**Tabla A. 8.** Continuación.

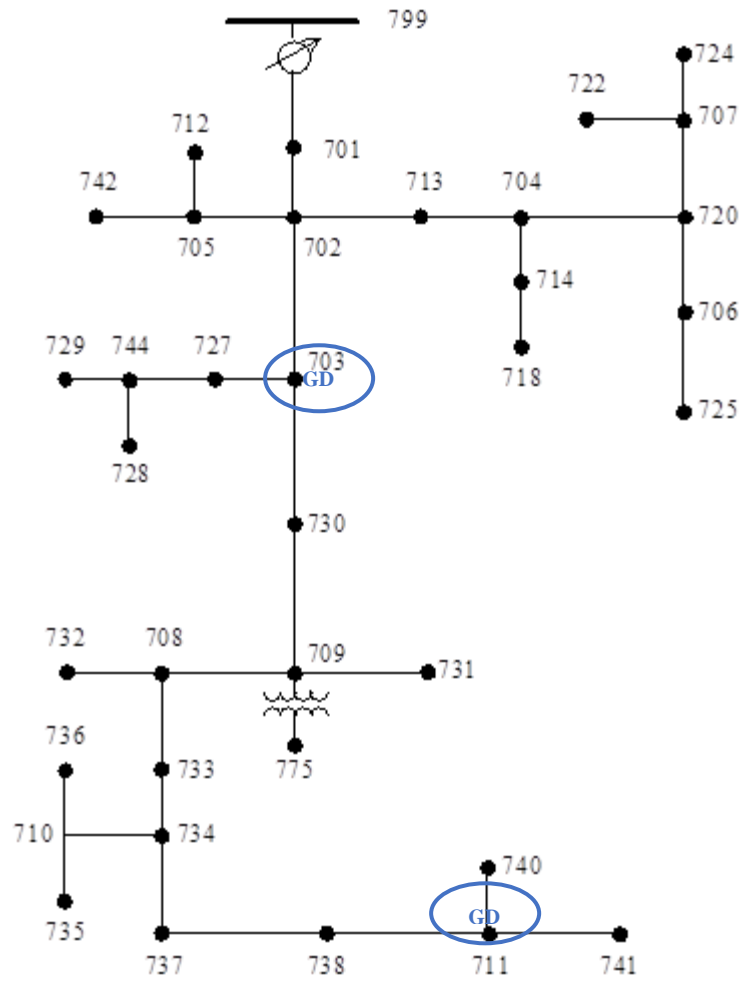
99	100	0,0030	0,0062	1,13E-08	0	0	0,04	0,02	0	0	0	2
97	101	0,0025	0,0051	9,45E-07	0	0	0,02	0,01	0	0	0	0
101	102	0,0098	0,0100	5,55E-07	0,04	0,02	0	0	0	0	0	0
102	103	0,0142	0,0144	8,02E-07	0	0	0	0	0,04	0,02	0	1
103	104	0,0305	0,0310	1,73E-08	0	0	0,04	0,02	0	0	0	0
101	105	0,0028	0,0057	1,04E-08	0	0	0	0	0,04	0,02	0	0
105	106	0,0098	0,0100	5,55E-07	0	0	0	0	0,02	0,04	0	1
106	107	0,0251	0,0254	1,42E-08	0	0	0	0	0,04	0,02	0	1
105	108	0,0033	0,0067	1,23E-08	0	0	0	0	0,04	0,02	0	0
108	109	0,0196	0,0199	1,11E-08	0	0	0,04	0,02	0	0	0	0
109	110	0,0131	0,0133	7,41E-08	0,04	0,2	0	0	0	0	0	0
110	111	0,0251	0,0254	1,42E-08	0,02	0,01	0	0	0	0	0	0
110	112	0,0055	0,0055	3,09E-08	0,02	0,01	0	0	0	0	0	0
112	113	0,0229	0,0232	1,30E-08	0,04	0,02	0	0	0	0	0	2
113	114	0,0142	0,0144	8,02E-07	0,02	0,01	0	0	0	0	0	2
51	151	0,0050	0,0103	1,89E-07	0	0	0	0	0,02	0,01	0	0
30	250	0,0020	0,0041	7,56E-07	0	0	0,04	0,02	0	0	0	1
108	300	0,0100	0,0206	3,78E-08	0	0	0	0	0,02	0,01	0	2
100	450	0,0080	0,0165	3,02E-08	0,02	0,04	0	0	0	0	0	0



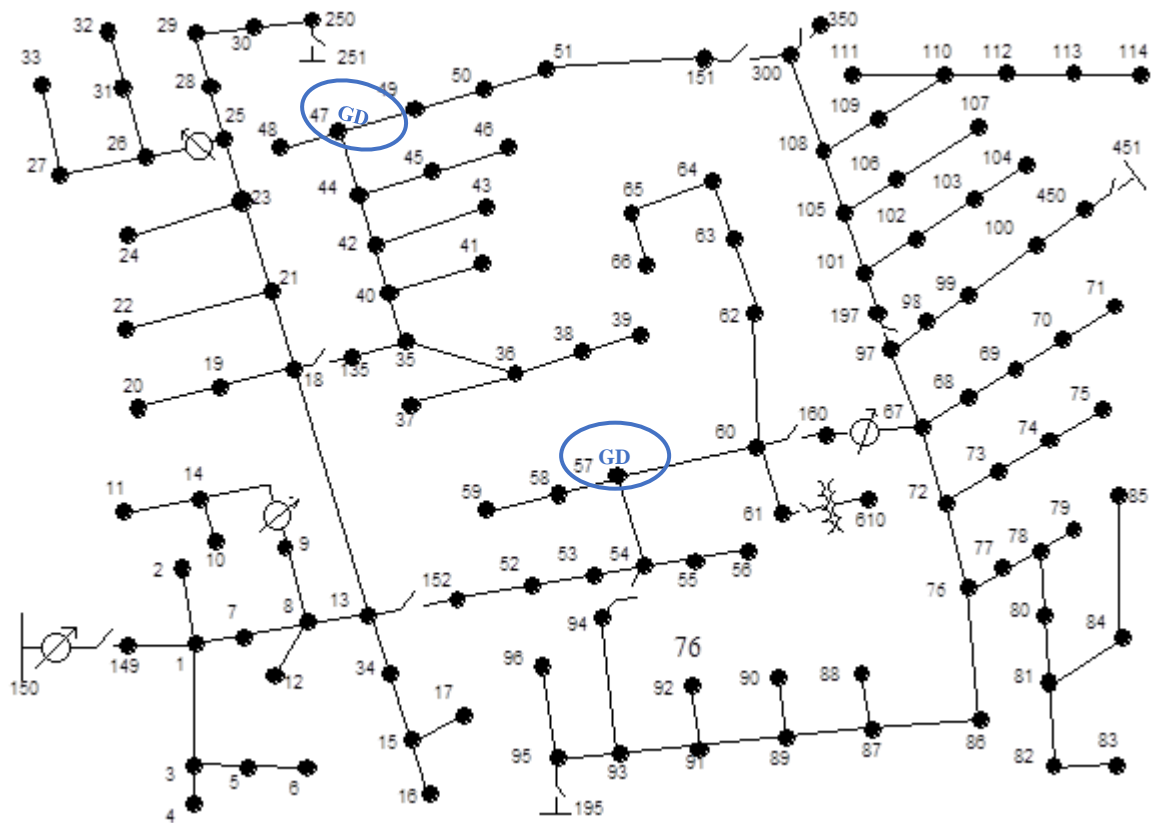
**Anexo B. Sistema de pruebas IEEE considerando generación distribuida**



**Figura B. 1.** Sistema de prueba IEEE13 nodos considerando 2 GD.



**Figura B. 2.** Sistema de prueba IEEE 37 nodos considerando 2 GD.



**Figura B. 3.** Sistema de prueba IEEE 123 nodos considerando 2 GD.

**ANEXO C. Resultados obtenidos con el sistema de pruebas IEEE, sin generación distribuida**

```
Status: Solved
Optimal value (cvx_optval): +0.0471153

La generación distribuida por fase en kW y kVAr son:
0
0
0

Las pérdidas totales del sistema en kW son:
47.1153

Las demandas totales por fase en kW y kVAr son:
1.1750e+03 + 4.1600e+02i
1.0390e+03 + 4.6500e+02i
1.2520e+03 + 5.2100e+02i
```

(a) CXV

Resumen total	kW	kvar	kVA	FP(%)
Fuentes (Potencia de equilibrio)	3328.75	1305.05	3685.63	92.32
Generadores	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>Producción total</b>	<b>3328.75</b>	<b>1305.05</b>	<b>3685.63</b>	<b>92.32</b>
Carga leída (no regulada)	3276.90	1951.90	3830.15	86.05
Carga utilizada (regulada)	3276.90	1939.85	3888.03	86.05
Condensadores shunt (regulados)	0.00	-461.88	461.88	0.00
Reactancias shunt (reguladas)	0.00	0.00	0.00	0.00
Motores	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>Cargas totales</b>	<b>3276.90</b>	<b>1277.97</b>	<b>3517.29</b>	<b>83.47</b>
Capacitancia del cable	0.00	0.00	0.00	0.00
Capacitancia de la línea	0.00	-0.32	0.32	0.00
<b>Capacitancia shunt total</b>	<b>0.00</b>	<b>-0.32</b>	<b>0.32</b>	<b>0.00</b>
Pérdidas en las líneas	51.84	107.99	119.79	43.28
Pérdidas en los cables	0.00	0.00	0.00	0.00
Pérdidas de carga del transformador	0.00	0.00	0.00	0.00
Pérdidas en vacío del transformador	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>Pérdidas totales</b>	<b>51.84</b>	<b>107.99</b>	<b>119.79</b>	<b>43.28</b>

(b) Cymdist

**Figura C. 1. Resultados obtenidos sin GD, para el sistema IEEE 13 nodos**

```
Status: Solved
Optimal value (cvx_optval): +0.0314669

La generación distribuida por fase en kW y kVAr son:
0
0
0

Las pérdidas totales del sistema en kW son:
31.4669

Las demandas totales por fase en kW y kVAr son:
6.6400e+02 + 3.2100e+02i
5.4300e+02 + 2.6550e+02i
6.2000e+02 + 2.9950e+02i
```

(a) CXV

Resumen total	kW	kvar	kVA	FP(%)
Fuentes (Potencia de equilibrio)	2465.57	1210.29	2746.96	89.77
Generadores	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>Producción total</b>	<b>2465.57</b>	<b>1210.29</b>	<b>2746.96</b>	<b>89.77</b>
Carga leída (no regulada)	2457.00	1291.00	2734.82	89.64
Carga utilizada (regulada)	2432.33	1189.01	2707.39	89.54
Condensadores shunt (regulados)	0.00	0.00	0.00	0.00
Reactancias shunt (reguladas)	0.00	0.00	0.00	0.00
Motores	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>Cargas totales</b>	<b>2432.33</b>	<b>1189.01</b>	<b>2707.39</b>	<b>89.64</b>
Capacitancia del cable	0.00	0.00	0.00	0.00
Capacitancia de la línea	0.00	-5.20	5.20	0.00
<b>Capacitancia shunt total</b>	<b>0.00</b>	<b>-5.20</b>	<b>5.20</b>	<b>0.00</b>
Pérdidas en las líneas	33.84	26.48	42.81	78.58
Pérdidas en los cables	0.00	0.00	0.00	0.00
Pérdidas de carga del transformador	0.00	0.00	0.00	0.00
Pérdidas en vacío del transformador	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>Pérdidas totales</b>	<b>33.84</b>	<b>26.48</b>	<b>42.81</b>	<b>78.58</b>

(b) Cymdist

**Figura C. 2. Resultados obtenidos sin GD, para el sistema IEEE 37 nodos**

Status: Solved  
 Optimal value (cvx\_optval): +0.0955717

La generacion distribuida por fase en kW y kVAR son:  
 0  
 0  
 0

Las perdidas totales del sistema en kW son:  
 85.5717

Las demandas totales por fase en kW y KVAR son:  
 1.4403e+03 + 4.8250e+02i  
 9.9280e+02 + 2.6000e+02i  
 1.1979e+03 + 1.4750e+02i

Resumen total	kW	kvar	KVA	FP(%)
Fuentes (Potencia de equilibrio)	3510.75	1333.99	3755.65	93.40
Generadores	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>Producción total</b>	<b>3510.75</b>	<b>1333.99</b>	<b>3755.65</b>	<b>93.40</b>
Carga leída (no regulada)	3480.00	1926.00	3903.28	87.62
Carga utilizada (regulada)	3423.69	1879.85	3905.83	87.68
Condensadores shunt (regulados)	0.00	-742.64	742.64	0.00
Reactancias shunt/reguladas	0.00	0.00	0.00	0.00
líneas	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>Cargas totales</b>	<b>3423.69</b>	<b>1137.21</b>	<b>3607.82</b>	<b>94.90</b>
Capacitancia del cable	0.00	0.00	0.00	0.00
Capacitancia de la línea	0.00	-0.81	0.81	0.00
<b>Capacitancia shunt total</b>	<b>0.00</b>	<b>-0.81</b>	<b>0.81</b>	<b>0.00</b>
Pérdidas en las líneas	87.06	197.59	215.92	46.32
Pérdidas en los cables	0.00	0.00	0.00	0.00
Pérdidas de carga del transformador	-0.00	0.00	0.00	0.00
Pérdidas en vacío del transformador	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>Pérdidas totales</b>	<b>87.06</b>	<b>197.59</b>	<b>215.92</b>	<b>46.32</b>

(a) CXV

(b) Cymdist

**Figura C. 3.** Resultados obtenidos sin GD, para el sistema IEEE 123 nodos

**ANEXO D. Resultados obtenidos con el sistema de pruebas IEEE, considerando generación distribuida**

(a) CXV

(b) Cymdist

La generación distribuida por fase en kW y kVAR son:  
 1.0e+02 \*

2.9999 + 0.9999i  
 1.9946 + 0.9993i  
 2.9994 + 0.9497i  
 2.9997 + 0.9998i  
 2.9999 + 0.9999i  
 0.0275 - 0.0020i

Las pérdidas totales del sistema en kW son:  
 26.2920

Las demandas totales por fase en kW y kVAR son:  
 1.1750e+03 + 4.1600e+02i  
 1.0390e+03 + 4.6500e+02i  
 1.2520e+03 + 5.2100e+02i

Resumen total	kW	kvar	kVA	FP(%)
Fuentes (Potencia de equilibrio)	1951,17	841,97	2125,09	91,82
Generadores	1353,58	454,43	1443,70	94,29
<b>Producción total</b>	<b>3314,76</b>	<b>1326,46</b>	<b>3568,97</b>	<b>93,83</b>
Carga leída (no regulada)	3298,00	1951,00	3833,15	86,95
Carga utilizada (regulada)	3281,71	1942,83	3813,58	86,95
Condensadores shunt (regulados)	0,00	-875,67	875,67	0,00
Reactancias shunt (reguladas)	0,00	0,00	0,00	0,00
Motores	0,00	0,00	0,00	0,00
<b>Cargas totales</b>	<b>3281,71</b>	<b>1266,96</b>	<b>3517,78</b>	<b>93,29</b>
Capacitancia del cable	0,00	0,00	0,00	0,00
Capacitancia de la línea	0,00	-0,32	0,32	0,00
<b>Capacitancia shunt total</b>	<b>0,00</b>	<b>-0,32</b>	<b>0,32</b>	<b>0,00</b>
Pérdidas en las líneas	29,46	59,82	66,68	44,18
Pérdidas en los cables	0,00	0,00	0,00	0,00
Pérdidas de carga del transformador	0,00	0,00	0,00	0,00
Pérdidas en vacío del transformador	0,00	0,00	0,00	0,00
<b>Pérdidas totales</b>	<b>29,46</b>	<b>59,82</b>	<b>66,68</b>	<b>44,18</b>

**Figura D. 1. Resultados obtenidos considerando GD, para el sistema IEEE 13 nodos**

Status: Solved  
 Optimal value (cxv\_optval): 40.00771748

La generación distribuida por fase en kW y kVAR son:  
 1.0e+02 \*

2.4561 + 0.9992i  
 2.9890 + 0.9996i  
 1.4917 + 0.7090i  
 2.6507 + 0.9949i  
 1.3874 + 0.7589i  
 2.9739 + 0.9973i

Las pérdidas totales del sistema en kW son:  
 7.7178

Las demandas totales por fase en kW y kVAR son:  
 6.6000e+02 + 3.2100e+02i  
 5.4300e+02 + 2.6350e+02i  
 6.2000e+02 + 2.9950e+02i

Resumen total	kW	kvar	kVA	FP(%)
Fuentes (Potencia de equilibrio)	1064,75	640,27	1242,43	85,70
Generadores	1394,00	557,19	1501,23	92,86
<b>Producción total</b>	<b>2458,75</b>	<b>1197,46</b>	<b>2734,84</b>	<b>89,90</b>
Carga leída (no regulada)	2457,00	1201,00	2734,82	89,94
Carga utilizada (regulada)	2448,67	1196,93	2725,55	89,94
Condensadores shunt (regulados)	0,00	0,00	0,00	0,00
Reactancias shunt (reguladas)	0,00	0,00	0,00	0,00
Motores	0,00	0,00	0,00	0,00
<b>Cargas totales</b>	<b>2448,67</b>	<b>1196,93</b>	<b>2725,55</b>	<b>89,94</b>
Capacitancia del cable	0,00	0,00	0,00	0,00
Capacitancia de la línea	0,00	-5,32	5,32	0,00
<b>Capacitancia shunt total</b>	<b>0,00</b>	<b>-5,32</b>	<b>5,32</b>	<b>0,00</b>
Pérdidas en las líneas	10,08	5,96	11,66	86,47
Pérdidas en los cables	0,00	0,00	0,00	0,00
Pérdidas de carga del transformador	0,00	0,00	0,00	0,00
Pérdidas en vacío del transformador	0,00	0,00	0,00	0,00
<b>Pérdidas totales</b>	<b>10,08</b>	<b>5,96</b>	<b>11,66</b>	<b>86,47</b>

(a) CXV

(b) Cymdist

**Figura D. 2. Resultados obtenidos considerando GD, para el sistema IEEE 37 nodos.**

La generación distribuida por fase en kW y kVAr son:

1.0e+02 \*

2.9999 + 0.9998i

2.9987 + 0.9998i

2.4777 + 0.8683i

2.9993 + 0.9968i

2.9998 + 0.9981i

2.9998 + 0.5265i

Las pérdidas totales del sistema en kW son:

55.4031

Las demandas totales por fase en kW y kVAr son:

1.4403e+03 + 4.2250e+02i

9.9280e+02 + 2.6000e+02i

1.1979e+03 + 1.4750e+02i

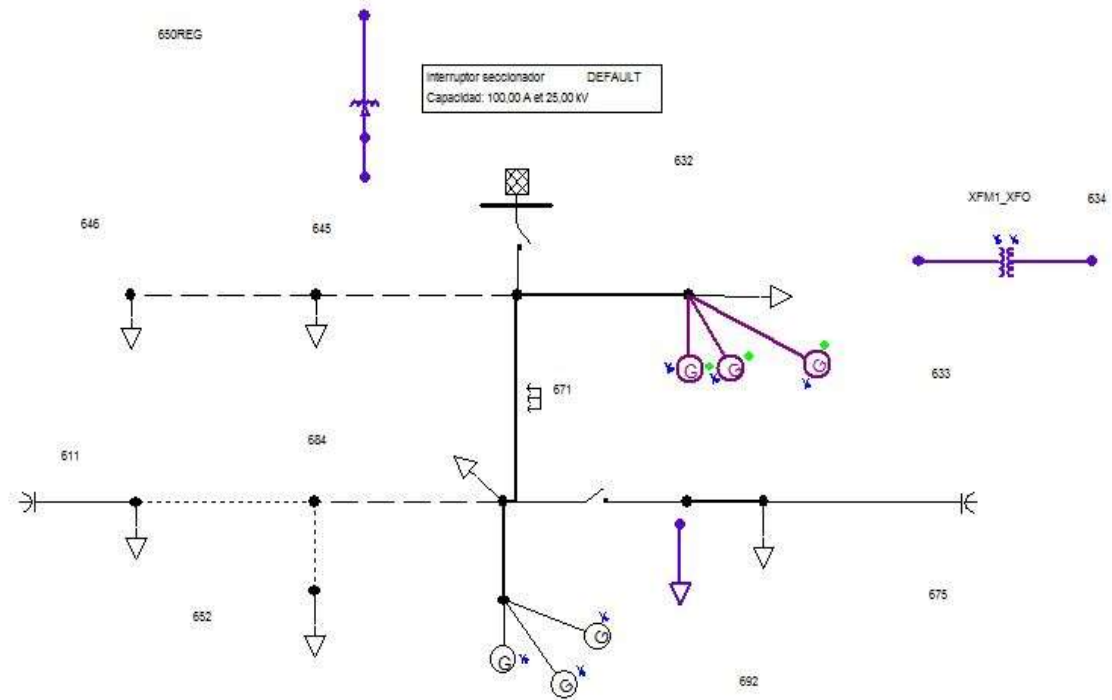
Resumen total	kW	kvar	kVA	FP(%)
Fuentes (Potencia de equilibrio)	1752.87	630.11	1885.58	93.95
Generadores	1747.86	558.66	1834.91	95.25
<b>Producción total</b>	<b>3500.47</b>	<b>1197.77</b>	<b>3699.72</b>	<b>94.61</b>
Carga leída (no regulada)	3480.00	1920.00	3983.28	87.62
Carga utilizada (regulada)	3471.89	1908.09	3961.20	87.63
Condensadores shunt (regulados)	0.00	-775.77	775.77	0.00
Reactancias shunt (reguladas)	0.00	0.00	0.00	0.00
Motores	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>Cargas totales:</b>	<b>3471.89</b>	<b>1132.82</b>	<b>3651.26</b>	<b>95.07</b>
Capacitancia del cable	0.00	0.00	0.00	0.00
Capacitancia de la línea	0.00	-0.84	0.84	0.00
<b>Capacitancia shunt total</b>	<b>0.00</b>	<b>-0.84</b>	<b>0.84</b>	<b>0.00</b>
Pérdidas en las líneas	29.38	65.80	72.06	40.78
Pérdidas en los cables	0.00	0.00	0.00	0.00
Pérdidas de carga del transformador	0.00	0.00	0.00	0.00
Pérdidas en vacío del transformador	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>Pérdidas totales</b>	<b>29.38</b>	<b>65.80</b>	<b>72.06</b>	<b>40.78</b>

(a) CXV

(b) Cymdist

**Figura D. 3.** Resultados obtenidos sin GD, para el sistema IEEE 123 nodos

**ANEXO E. Simulaciones realizadas en el software CYMDIST**



**Figura E. 1.** Simulación en Cymdist sistema de pruebas IEEE 13 nodos.



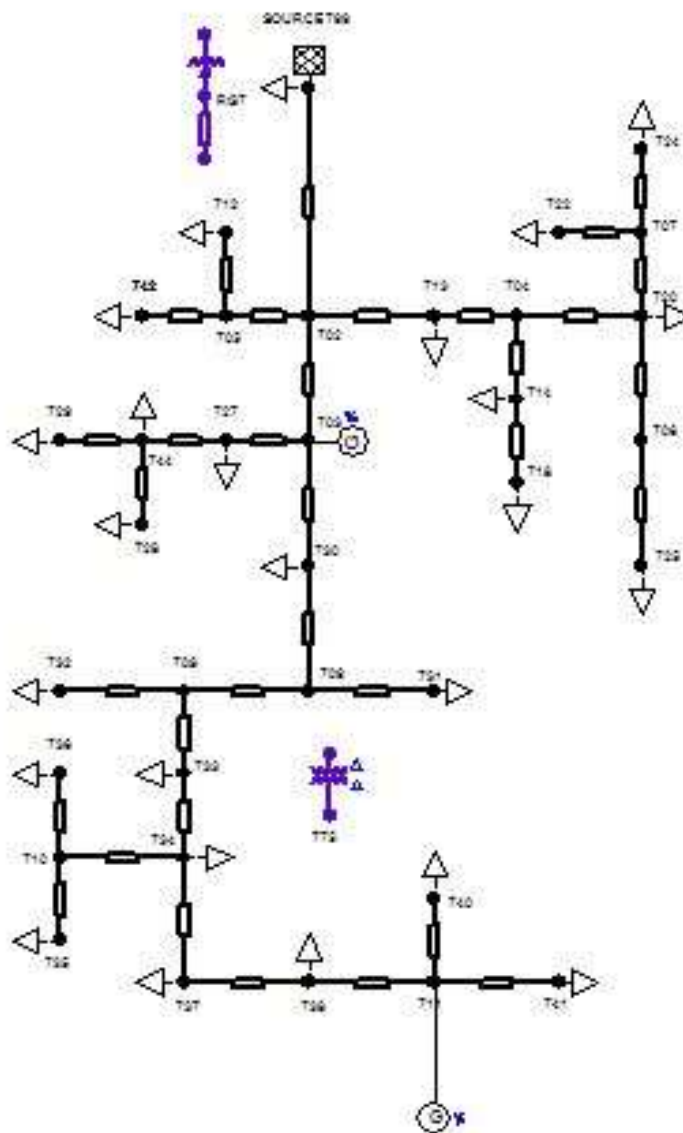
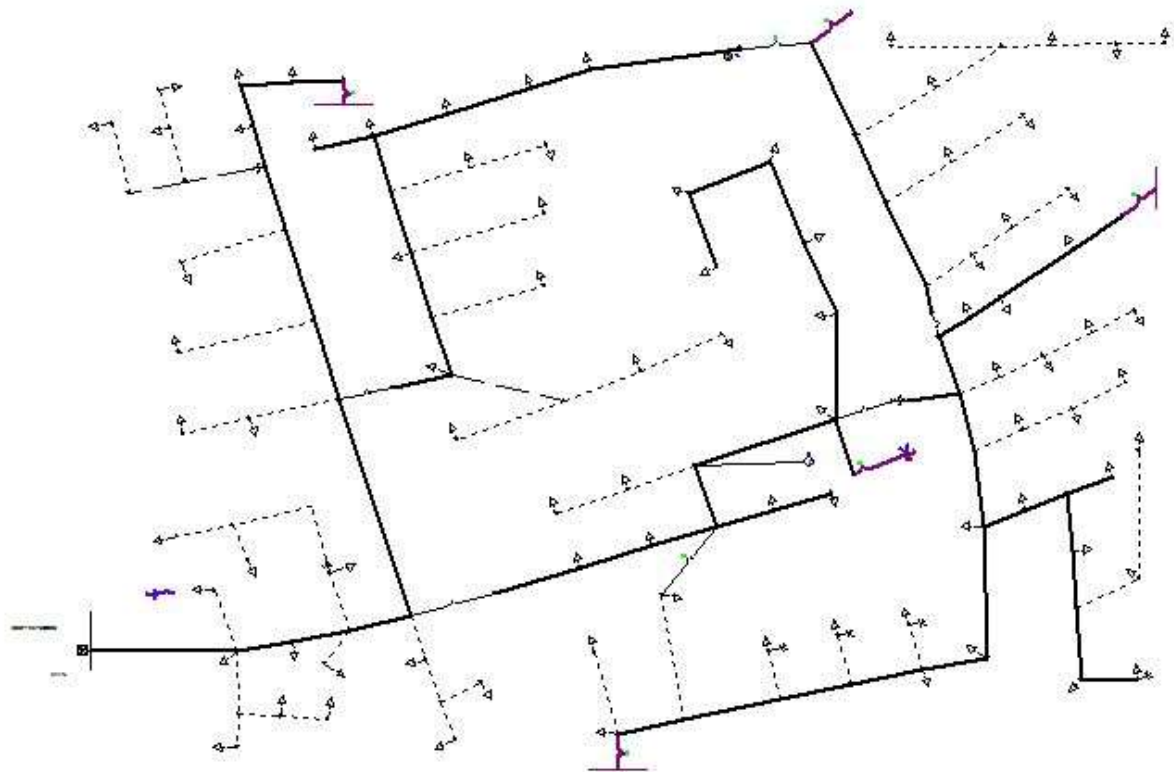


Figura E. 2. Simulación en Cymdist sistema de pruebas IEEE 37 nodos.



**Figura E. 3.** Simulación en Cymdist sistema de pruebas IEEE 123 nodos.

ANEXO F. Perfiles de tensión obtenidos en CVX

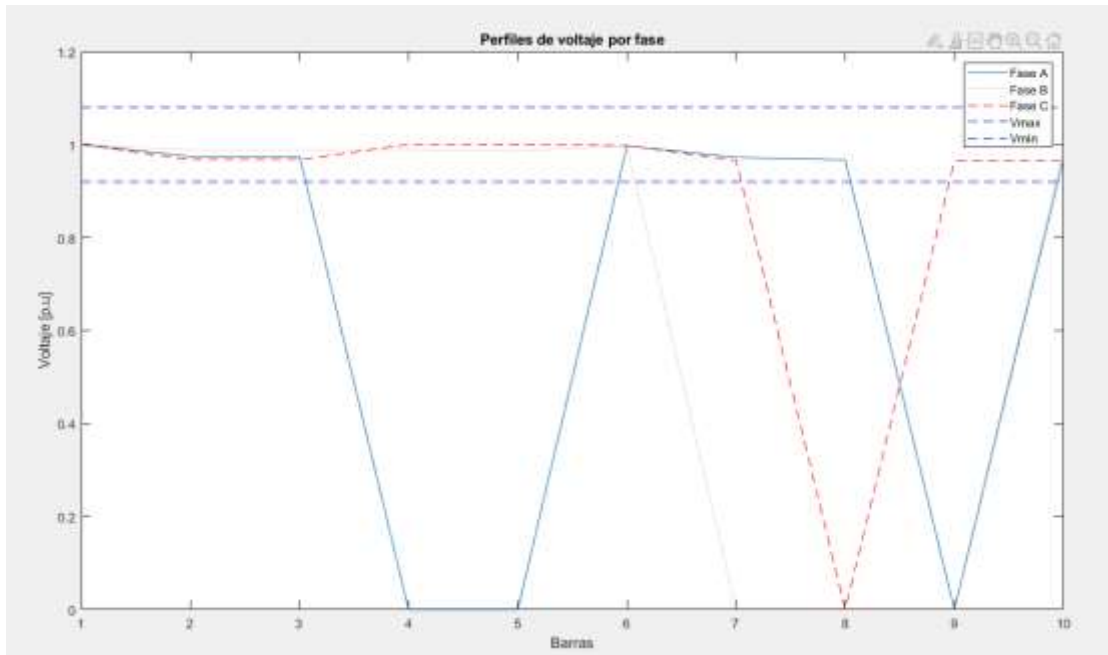


Figura F. 1. Perfil de tensión de la IEEE 13 nodos sin GD.

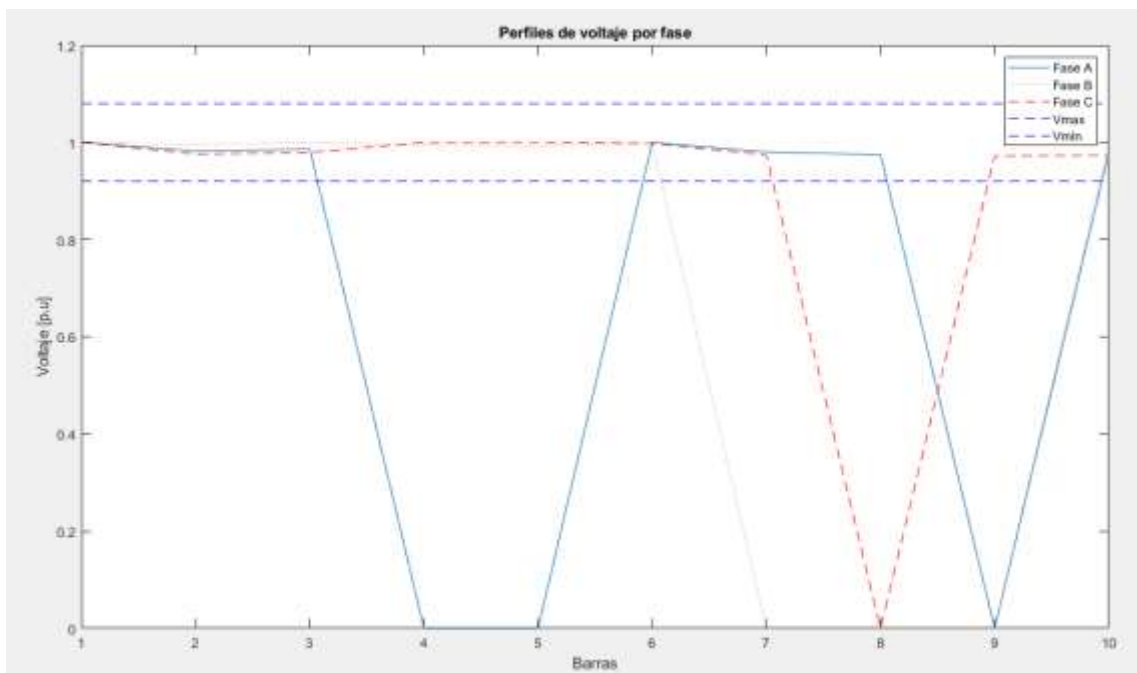


Figura F. 2. Perfil de tensión de la IEEE 13 nodos con GD.

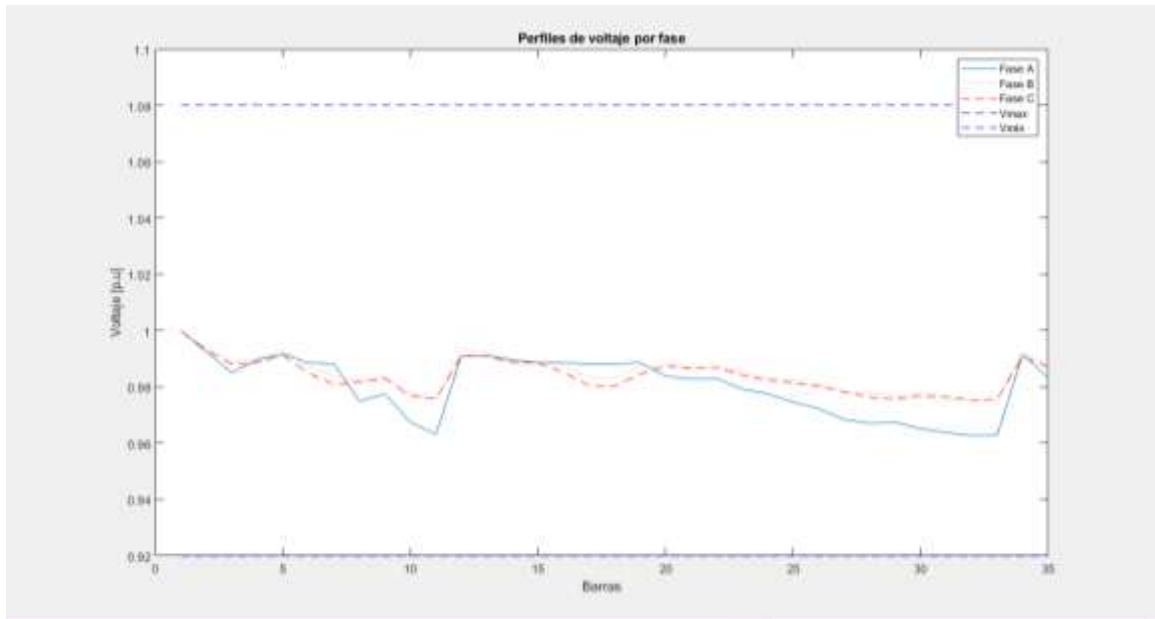


Figura F. 3. Perfil de tensión de la IEEE 37 nodos sin GD.

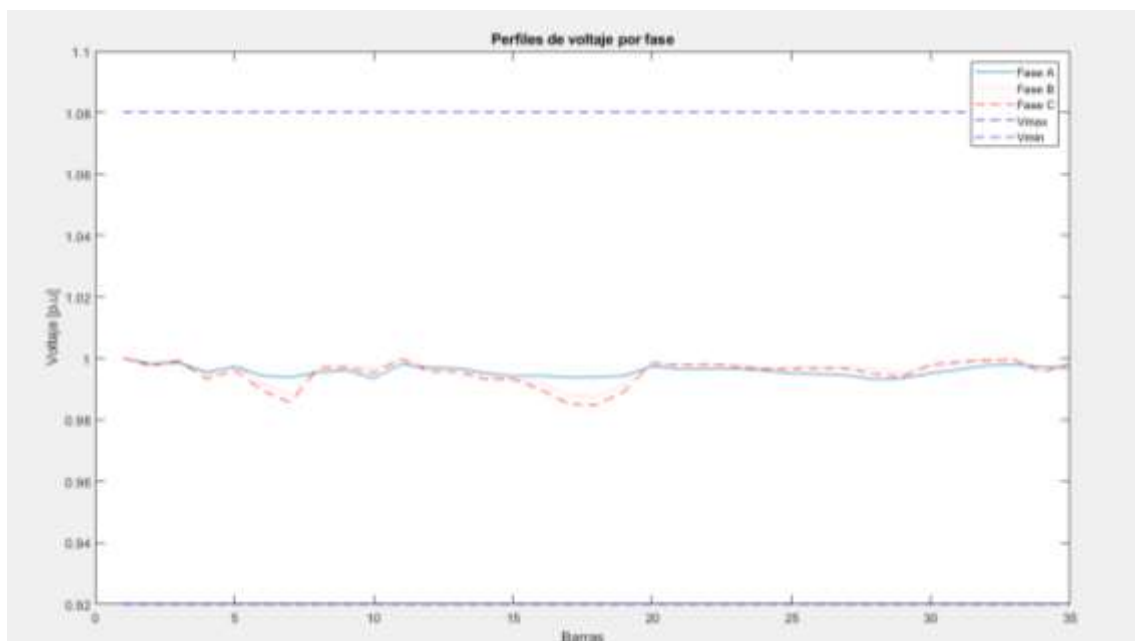
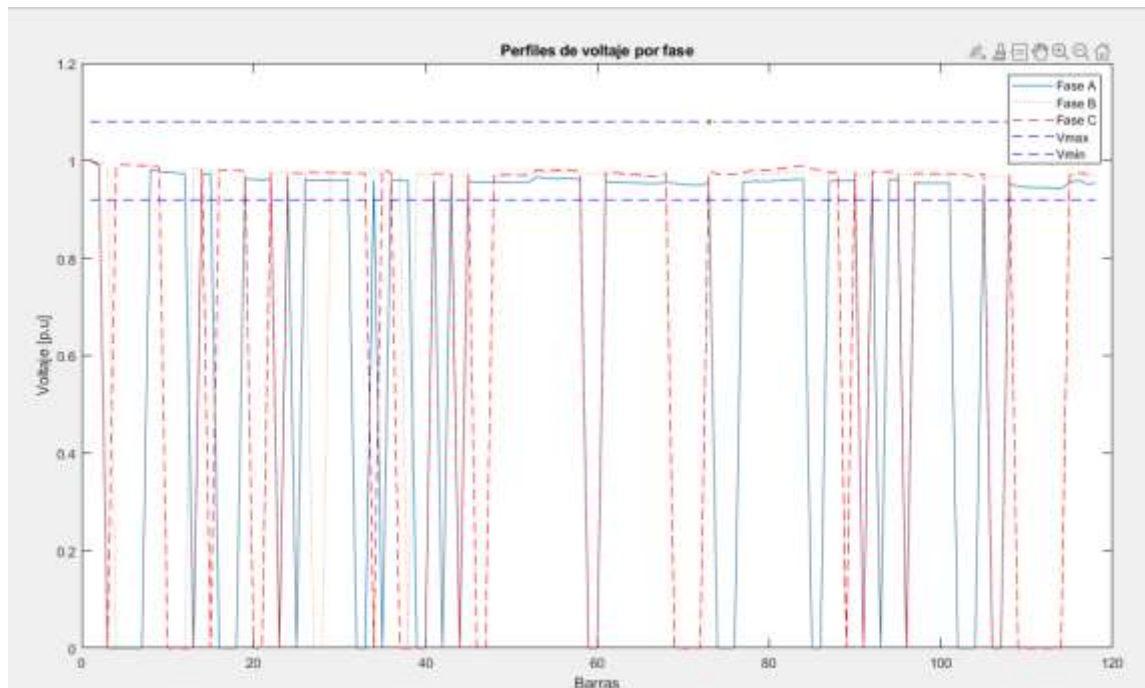
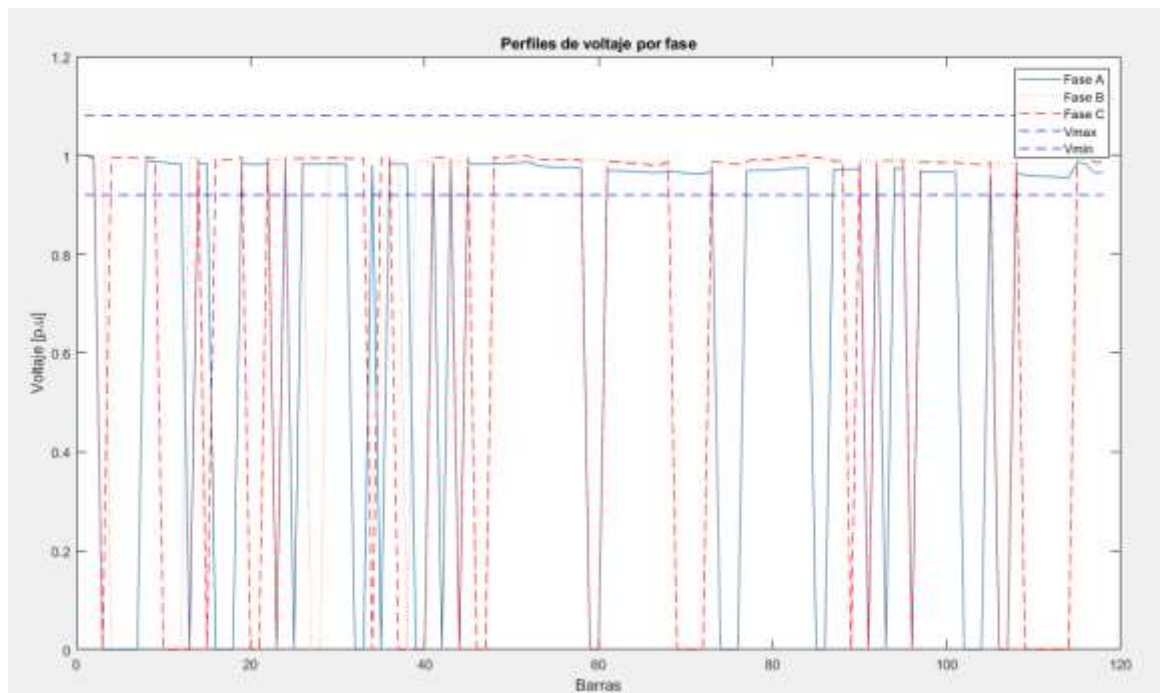


Figura F. 4. Perfil de tensión de la IEEE 37 nodos con GD.



**Figura F. 5.** Perfil de tensión de la IEEE 123 nodos sin GD.



**Figura F. 6.** Perfil de tensión de la IEEE 123 nodos con GD.