



# UNIVERSIDAD TÉCNICA DE COTOPAXI

## DIRECCIÓN DE POSGRADO

### MAESTRÍA EN ELECTRICIDAD

### MODALIDAD: ARTÍCULO CIENTÍFICO

**Título:**

---

Evaluación de modelos de optimización convexos para minimizar pérdidas en el sistema de distribución.

---

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Magister en Electricidad  
mención Sistemas Eléctricos de Potencia

**Autor:**

Ing. Vaca González Jimmy Roberto

**Tutor:**

Ing. Quinatoa Caiza Carlos Iván MSc.

LATACUNGA –ECUADOR

2024

## APROBACIÓN DEL TUTOR

En mi calidad de Tutor del Trabajo de Titulación “**Evaluación de modelos de optimización convexos para minimizar pérdidas en el sistema de distribución**” presentado por el Ing. Vaca González Jimmy Roberto para optar por el título magíster en Electricidad mención Sistemas Eléctricos de Potencia.

## CERTIFICO

Que dicho trabajo de investigación ha sido revisado en todas sus partes y se considera que reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación para la valoración por parte del Tribunal de Lectores que se designe y su exposición y defensa pública.

Latacunga, noviembre de 2024



MSc. Carlos Iván Quinatoa Caiza

CC. 0503287864

## APROBACIÓN DEL TRIBUNAL

El trabajo de Titulación: "Evaluación de modelos de optimización convexos para minimizar pérdidas en el sistema de distribución", ha sido revisado, aprobado y autorizado su impresión y empastado, previo a la obtención del título de magíster en Electricidad mención sistemas eléctricos de potencia; el presente trabajo reúne los requisitos de fondo y forma para que el estudiante pueda presentarse a la exposición y defensa.

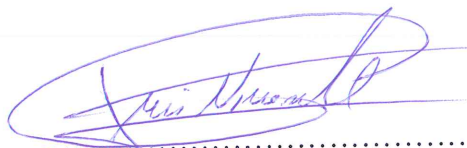
Latacunga, noviembre 2024



.....  
MSc. Ing. Josué Steeven Ortiz Malla  
CC:2300657570  
Presidente del tribunal



.....  
MSc. Ing. Fernando Rafael Arias Atiaja  
CC: 0502556251  
Lector 2



.....  
MSc. Ing. Luis Miguel Navarrete López  
CC:1803747284  
Lector 3

## **DEDICATORIA**

Dedico este artículo científico en primer lugar, a mis padres Roberto Vaca y Sonia González, quienes han sido el pilar fundamental para que pueda cumplir este anhelado sueño de obtener el título de Magíster gracias a su amor, sacrificio y apoyo incondicional, he llegado hasta aquí.

A mi hermano Oscar Vaca, por su constante aliento durante este proceso.

A mis tíos, Pablo Moreno y María Vaca, a mis primos, Edy y Erika, por su respaldo y cariño inquebrantables.

A mi mejor amigo, Xavier Montenegro a quien considero como un hermano por sus sabios consejos.

Y con un cariño muy especial a Ángela Maricela por su apoyo incondicional por siempre creer en mí y por ser un pilar importante en mi vida.

**Jimmy Roberto Vaca González**

## **AGRADECIMIENTO**

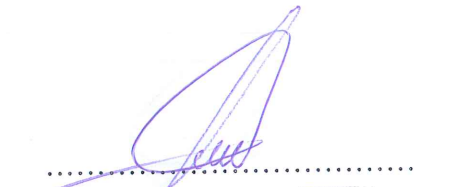
Primeramente, agradezco a Dios por la salud y la vida, ya que todo logro es posible gracias a su divina gracia. A mis padres, por su apoyo incondicional, tanto moral como económico y por la educación que me han brindado, la cual me ha permitido alcanzar este nuevo escalafón en mi vida académica y personal. A mi querida Alma Mater, la Universidad Técnica de Cotopaxi, por haberme preparado durante mi formación de grado y ahora en posgrado, impulsándome a aplicar los conocimientos adquiridos en el ámbito científico, tecnológico y económico, siempre en busca del desarrollo y bienestar de nuestra sociedad.

Jimmy Roberto Vaca González

## RESPONSABILIDAD DE AUTORÍA

Quien suscribe, declara que asume la autoría de los contenidos y los resultados obtenidos en el presente trabajo de titulación.

Latacunga, noviembre 2024

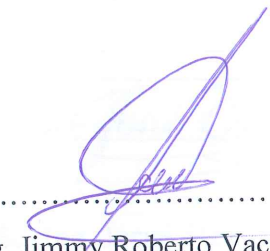


.....  
Ing. Jimmy Roberto Vaca González  
CC: 0550021539

## RENUNCIA DE DERECHOS

Quien suscribe, cede los derechos de autoría intelectual total y/o parcial del presente trabajo de titulación a la Universidad Técnica de Cotopaxi.

Latacunga, noviembre 2024




.....  
Ing. Jimmy Roberto Vaca González  
CC: 0550021539

## AVAL DEL PRESIDENTE

Quien suscribe, declara que el presente Trabajo de Titulación: Evaluación de modelos de optimización convexos para minimizar pérdidas en el sistema de distribución, contiene las correcciones a las observaciones realizadas por los lectores en sesión científica del tribunal.

Latacunga, noviembre 2024



.....  
MSc. Ing. Josué Steeven Ortiz Malla

CC:2300657570

**UNIVERSIDAD TÉCNICA DE COTOPAXI  
DIRECCIÓN DE POSGRADO**

**MAESTRÍA EN ELECTRICIDAD  
MENCIÓN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA**

**Título:** Evaluación de modelos de optimización convexos para minimizar pérdidas en el sistema de distribución

**Autor:** Vaca González Jimmy Roberto, Ing.

**Tutor:** Quinatoa Caiza Carlos Iván, M.Sc.

**RESUMEN**

El presente trabajo de investigación propone la evaluación de modelos convexos para el despacho de energía a corto plazo, optimizando la ubicación de generadores y minimizando pérdidas en redes de distribución. Para ello, se utiliza modelos convexos en un periodo de 12 horas con una variación horaria de la demanda, empleando el sistema IEEE de 15 nodos tipo radial. Debido a las ecuaciones de potencia activa y reactiva de inyección nodal, el problema se vuelve no convexo y requiere más recursos computacionales para encontrar soluciones locales óptimas. Para abordar el problema de no linealidad se analizan modelos como el cálculo de Wirtinger y la aproximación cónica de segundo orden. El primer modelo resuelve en 8.12 segundos con errores de voltaje del 0.63% y ángulo del 1.40%, y el segundo en 17.8 segundos con errores del 0.61% y 1.38%, respectivamente. La ubicación óptima de las unidades de generación son los nodos 7, 8 y 10. El valor de la función objetivo para cada modelo es 0.00731149 p.u. para el modelo no lineal, 0.00734619 p.u, para el modelo Wirtinger 0.00744715 p.u, y para el modelo de aproximación cónica de segundo orden (SOC), con una base de 100 kVA.

**PALABRAS CLAVE:** Convexidad; Distribución; Optimización; Pérdidas, Wirtinger.

**UNIVERSIDAD TÉCNICA DE COTOPAXI  
DIRECCIÓN DE POSGRADO**

**MAESTRÍA EN ELECTRICIDAD  
MENCIÓN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA**

**Title:** Evaluation of convex optimization models for minimizing losses in distribution systems

**Author:** Vaca González Jimmy Roberto, Ing.

**Tutor:** Quinatoa Caiza Carlos Iván, M.Sc.

**ABSTRACT**

The current work research proposes the convex model's assessment for short-term energy dispatch, by optimizing the generators' location and minimizing losses in distribution networks. To do so, they are used convex models over a 12-hour period with demand hourly variation, using the IEEE 15-node radial system. Due to the active and reactive power equations from nodal injection, the problem becomes non-convex and requires more computational resources to find optimal local solutions. For addressing the non-linearity problem, they are analyzed models, such as the Wirtinger calculation and the second-order conic approximation. The first model solves in 8.12 seconds with voltage errors 0.63% and angle 1.40%, and the second in 17.8 seconds with errors 0.61% and 1.38%, respectively. The generating units optimal location are nodes 7, 8 and 10. The objective function value for each model is 0.00731149 p.u. for the non-linear model, 0.00734619 p.u. for the Wirtinger model 0.00744715 p.u., and for the second-order conic (SOC) approximation model, with a 100 kVA base.

**KEY WORDS:** Convexity; Distribution; Optimization; Losses; Wirtinger

Yo, Marco Paúl Beltrán Semblantes con cédula de identidad número: 0502666514 Magíster en Lingüística Aplicada en la enseñanza del Idioma Inglés como Lengua Extranjera con número de registro de la SENESCYT ; 1020-2021-2354162: CERTIFICO haber revisado y aprobado la traducción al idioma Inglés del resumen del trabajo de investigación con el título: **“EVALUACIÓN DE MODELOS DE OPTIMIZACIÓN CONVEXOS PARA MINIMIZAR PÉRDIDAS EN EL SISTEMA DE DISTRIBUCIÓN”** de: **Vaca González Jimmy Roberto**, aspirante a Magíster en Electricidad Mención Sistemas Eléctricos de Potencia.

Latacunga, 28 de Octubre del 2024.

Atentamente,

Mg. Marco Paúl Beltrán Semblantes  
**DOCENTE CENTRO DE IDIOMAS-UTC**



**CENTRO  
DE IDIOMAS**

## ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. INFORMACIÓN GENERAL-----	1
2. INTRODUCCIÓN-----	1
3. MATERIALES Y MÉTODOS-----	3
3.1 Metodología de la evolución de los modelos convexos -----	3
3.2 Formulación matemática del modelo de optimización-----	4
3.3 Modelo Flujo de Potencia Óptimo No Lineal (OPF-NL)-----	5
3.4 Análisis de la no linealidad del modelo flujo de potencia óptimo-----	7
3.5 Propiedades matemáticas para la convexidad de funciones no lineales -----	7
3.6 Definición uno conjunto convexo -----	7
3.7 Definición dos conjunto convexo-----	7
3.8 Definición tres función convexa -----	8
3.9 Formulación matemática de modelos convexos -----	8
3.10 Modelo basado en la aproximación cónica de segundo orden-----	9
4. RESULTADOS Y DISCUSION-----	13
5. CONCLUSIONES-----	17
6. REFERENCIAS-----	18

## ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1. Sistema de distribución radial IEEE 15 nodos .....	4
FIGURA 2. Sistema de distribución radial IEEE 15 nodos [21] .....	11
FIGURA 3. Curva de demanda 12 horas .....	11
FIGURA 4. Sistema de distribución radial IEEE 15 nodos, incorporando nuevas unidades de generación .....	13

FIGURA 5. Potencia activa generada por las centrales en 12 horas. Despacho de energía de modelos: No convexo, convexo basado en el cálculo de Wirtinger y Convexo basado en segundo orden cónico. ....	14
FIGURA 6. Distribución de ángulos del segundo orden cónico , Wirtinger y modelo no convexo en un periodo de 12 horas en el nodo más crítico. ....	15
FIGURA 7. Distribución de voltajes del segundo orden cónico, Wirtinger y modelo no convexo en un periodo de 12 horas en el nodo más crítico. ....	15
FIGURA 8. Error absoluto en voltaje de los modelos convexos frente al modelo no convexo en el nodo más crítico. ....	16
FIGURA 9. Error absoluto en ángulo de los modelos convexos frente al modelo no convexo en el nodo más crítico. ....	16

### ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Límites de generación .....	11
Tabla 2. Demanda de potencia activa en 12 horas .....	12
Tabla 3. Demanda de potencia activa en 12 horas .....	12
Tabla 4. Resultados de la simulación para los distintos modelos .....	17

## 1. INFORMACIÓN GENERAL

<b>Título del Proyecto:</b>	Evaluación de modelos de optimización convexos para minimizar pérdidas en el sistema de distribución
<b>Línea de investigación:</b>	Energías alternativas y renovables, eficiencia energética y protección ambiental.
<b>Proyecto de investigación asociado:</b>	Desarrollo de sistemas eficientes para el abastecimiento y uso de energía eléctrica a nivel local, regional o nacional.
<b>Grupo de Investigación:</b>	Sistemas Eléctricos de Potencia
<b>Red nacional o internacional:</b>	Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos (IEEE)

## 2. INTRODUCCIÓN

El estudio de los modelos de optimización en sistemas eléctricos, se enfoca en dos aspectos principales: la entrega de energía a los puntos de demanda al menor costo posible y la reducción de pérdidas en los sistemas [1]. Además, debido al aumento constante de la demanda los sistemas de potencia deben seguir expandiéndose para cumplir con esta finalidad. Con base a lo anterior, surge la necesidad de proponer modelos de optimización eficientes. Estos modelos deben enfocarse en las redes de distribución complejas que existen hoy en día, debido que estos sistemas de distribución tienen una naturaleza radial, el enfoque de esta investigación estará en minimizar las pérdidas del sistema mediante los modelos de optimización propuestos.

Para ello se analizó en esta investigación dos modelos particulares de optimización convexa. Por un lado, el modelo de optimización convexa utilizando el cálculo de Wirtinger, el cual permite generar aproximaciones a la ecuación general de flujo de potencia mediante las denominadas derivadas de Wirtinger. Por otra parte, la aproximación cónica de segundo orden, aplicando el criterio de ubicación óptima

de unidades de generación. Ambos modelos buscarán la convexidad en el sistema para lograr resolver el problema en el menor tiempo posible. A través de esta investigación, se evaluó la factibilidad y se medirá el error porcentual entre estas metodologías y el modelo clásico no convexo. Es importante señalar que el problema de optimización planteado incorporando la ubicación óptima de unidades de generación puede utilizarse ya sea en sistemas de distribución o sistemas de potencia, según [2] debido a su naturaleza que incorpora diferentes unidades de generación, lo convierte en un problema de optimización no lineal con variables continuas y discretas, incluidas restricciones de igualdad y desigualdad representadas en el modelo como límites de generación y flujo de potencia por las líneas.

Según los autores [3] debido a la representación discreta, la formulación se convierte en un problema de optimización no convexo, ahí la naturaleza compleja del mismo. En la actualidad, no existe mucha información sobre la aplicación de modelos convexos en sistemas de distribución de naturaleza radial para disminuir pérdidas, sino más bien el enfoque del uso de estos modelos convexos es la minimización de costos de operación el autor [4] propone tres modelos de optimización convexos, Relajación Cónica, Expansión en Series de Taylor, Envoltura de McCormick. Los resultados muestran un rendimiento sólido de los modelos propuestos y la recuperación factible de la solución. Por otro lado, los modelos usando el cálculo de Wirtinger, según expuesto por [5] muestra que se obtuvo los voltajes en el sistema en un tiempo de 0,265588 segundos, mientras que [6] muestra un tiempo de solución 0,012059 segundos para un script realizado en Matlab para un sistema de 69 nodos. Estos resultados indican que los modelos de prueba utilizados muestran una ejecución precisa y rápida. Sin embargo, no se ha discutido la precisión de las respuestas de los modelos convexos en cuestión se centran en minimizar pérdidas. Actualmente no existen muchas metodologías disponibles que proporcionen una perspectiva clara sobre los beneficios de estos modelos. Por ejemplo las investigaciones realizadas por [7] y [8] utilizando modelos de optimización basados en enjambre de partículas, tienen como función objetivo minimizar las pérdidas del sistema, logrando una reducción de pérdidas del 8,38%, además mencionan que el flujo de potencia óptimo basado en

optimización de enjambre de partículas ofrece mejores soluciones que los métodos basados en algoritmos iterativos como el Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno y algoritmos genéticos. Estos modelos en particular son metaheurísticas y la solución obtenida es un óptimo local, lo cual requiere un tiempo de solución bastante prolongado. Esto limita su utilidad a corto plazo debido a la necesidad de precisión y rápida convergencia.

Actualmente la ubicación óptima de unidades de generación se considera un recurso fundamental para la reducción de pérdidas. En la presente investigación, la implementación de generación distribuida se logra reducir las pérdidas en un 80%. Con el objetivo de promover la eficiencia energética y uso racional de energía, cada vez más se impulsan proyectos para incorporar generación distribuida al sistema eléctrico nacional. Se han realizado investigaciones y desarrollado metodologías específicas en este campo como las de [9], [10] y [11] quienes analizan a fondo los parámetros óptimos de la generación distribuida. Estos autores muestran reducciones cercanas al 20% en las pérdidas de potencia en los modelos propuestos. Este aspecto se enfatiza con la evaluación de modelos convexos y el criterio de ubicación óptima de unidades de generación.

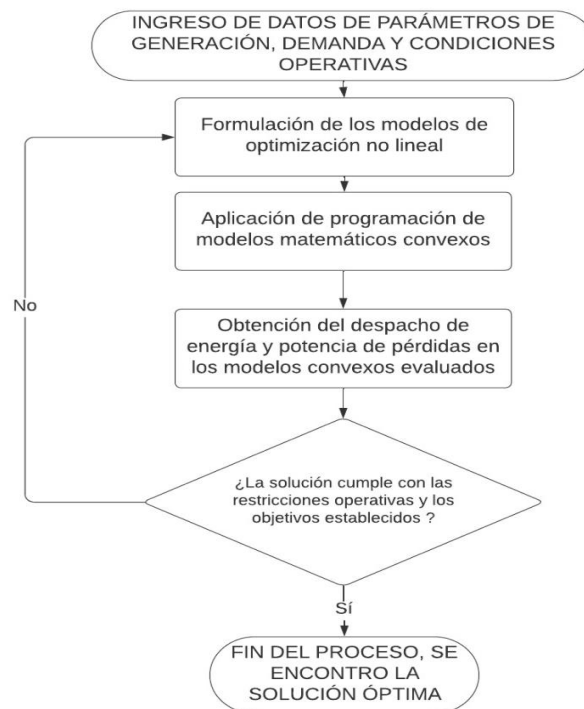
Este artículo está organizado de la siguiente manera, la primera sección expone las investigaciones realizadas referentes a los modelos convexos utilizados para reducir las pérdidas en los sistemas eléctricos de potencia. En la segunda sección se presenta el modelo de optimización matemática, incluyendo la formulación de los modelos convexos utilizados y los datos relevantes del sistema eléctrico. La tercera sección se realiza un análisis de los resultados obtenidos a partir de la aplicación de dichos modelos. Finalmente, en la cuarta sección se presentan las conclusiones del estudio.

### **3. MATERIALES Y MÉTODOS**

#### **3.1 Metodología de la evolución de los modelos convexos**

Para el desarrollo de la presente investigación, se realizó el ingreso de los parámetros de generación, demanda y condiciones operativas del sistema de

distribución radial. Posteriormente, se formuló el modelo de optimización no lineal. Una vez obtenido el modelo base, se procedió a la programación de los modelos matemáticos convexos para obtener el despacho de energía y potencia de pérdidas. Al obtener los resultados, se verificó que la solución cumpliera con las restricciones impuestas, encontrando el óptimo global del problema de optimización, tal como se representa en el diagrama de flujo en la figura 1.



**FIGURA 1.** Sistema de distribución radial IEEE 15 nodos

### 3.2 Formulación matemática del modelo de optimización

Según [12] el desarrollo de un modelo matemático de optimización para la reducción de pérdidas eléctricas en toda la red incorporando generación distribuida, contribuye significativamente a mejorar la eficiencia energética y la sostenibilidad de los sistemas eléctricos en general. Los parámetros del sistema base considerado en esta investigación se presentarán en las tablas posteriormente. El enfoque de optimización de sistemas eléctricos permite identificar y minimizar ineficiencias en un 80%, dependiendo del número de unidades de generación disponibles. Aprovecha la producción local de energía renovable para reducir la dependencia de fuentes de energía centralizadas y disminuir las pérdidas durante la transmisión y

distribución. Además, fomenta una mayor resiliencia y flexibilidad en la red eléctrica, facilitando una integración más eficaz de fuentes de energía renovable y promoviendo un entorno más sostenible y robusto para el futuro energético. En la optimización convexa, se prioriza la resolución de problemas con funciones objetivo y restricciones que exhiben convexidad, asegurando que cualquier mínimo local sea también un mínimo global. Esta característica permite el uso eficiente de algoritmos confiables como el descenso de gradientes. La optimización no lineal enfrenta problemas con restricciones y funciones objetivo no convexas, lo que puede resultar en múltiples mínimos locales sin garantía de encontrar el mínimo global. Estos casos requieren algoritmos más avanzados como métodos de Newton modificados o algoritmos evolutivos, que pueden ofrecer menos certeza en términos de convergencia y tiempo de cálculo. En esta investigación se analizó dos modelos particulares de optimización convexa, el modelo que utiliza el cálculo de Wirtinger, y la aproximación cónica de segundo orden, a su vez aplicando el criterio de ubicación óptima de unidades de generación, ambos modelos busca la convexidad en el sistema para lograr resolver el problema en el menor tiempo posible, es decir que el algoritmo converge lo más rápido posible ahorrando tiempo y recursos del procesador, por medio de esta investigación se evaluará la factibilidad y margen de error que existen entre estas metodologías con respecto al modelo clásico no convexo.

### 3.3 Modelo Flujo de Potencia Óptimo No Lineal (OPF-NL)

Se define como un modelo no lineal entero mixto de la siguiente manera.

$$\min OF = \sum_{t \in \Omega_T^i} P_{i,t}^{extra} + P_{i,t}^{th} - PL_{i,t} \quad (1)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i \in \Omega_G^i} P_{i,t}^{th} + \sum_{i \in \Omega_G^i} P_{i,t}^{extra} = \sum P_{i,t} + \sum PL_{i,t} \quad (2)$$

$$\sum_{i \in \Omega_G^i} Q_{i,t}^{th} = \sum Q_{i,t} + \sum QL_{i,t} \quad (3)$$

$$P_{i,t} = V_{i,t}^2 G_{ii,t} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N V_{i,t} V_{j,t} Y_{ij,t} \cos(\delta_{i,t} - \delta_{j,t} - \theta_{ij,t}) \quad (4)$$

$$Q_{i,t} = -V_{i,t}^2 B_{ii,t} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N V_{i,t} V_{j,t} Y_{ij,t} \cos(\delta_{i,t} - \delta_{j,t} - \theta_{ij,t}) \quad (5)$$

$$P_i^{th,min} \leq P_{i,t}^{th} \leq P_i^{th,max} \quad i \in \Omega_{th}, t \in \Omega_T \quad (6)$$

$$Q_i^{th,min} \leq Q_{i,t}^{th} \leq Q_i^{th,max} \quad i \in \Omega_{th}, t \in \Omega_T \quad (7)$$

$$P_i^{extra,min} \leq P_{i,t}^{extra} \leq P_i^{extra,max} \quad i \in \Omega_{extras}, t \in \Omega_T \quad (8)$$

$$Q_i^{h,min} \leq Q_{i,t}^h \leq Q_i^{h,max} \quad i \in \Omega_h, t \in \Omega_T \quad (9)$$

$$-P_{ij}^{max} \leq P_{ij,t} \leq P_{ij}^{max} \quad (10)$$

$$-Q_{ij}^{max} \leq Q_{ij,t} \leq Q_{ij}^{max} \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \leq U_{max} \quad (12)$$

$$P_{i,t}^{extra} \leq w_i * P_i^{extra,max} \quad (13)$$

La función objetivo mostrada en la ecuación (1) está en función de  $P_{i,t}^{th}$  la cual representa la potencia generada por las unidades de generación térmicas en el nodo  $i$  en la hora  $t$ , de la misma forma  $P_{i,t}^{extra}$  las unidades de generación adicionales  $\Omega_T$  y  $\Omega_{extras}$  perteneciente al conjunto de unidades térmicas y unidades extra respectivamente,  $PL_{i,t}$  potencia demandada en cada nodo en la hora  $t$ . Las ecuaciones de balance del modelo están tanto para potencia activa, como para potencia reactiva siendo  $PL_{i,t}$  y  $QL_{i,t}$  las demandas en los nodos  $i$  en la hora  $t$  respectivamente. Las ecuaciones (2) y (3) representan el balance de potencia activa y reactiva respectivamente, las ecuaciones (4) y (5) representan la inyección de potencia activa y reactiva respectivamente, las ecuaciones (6) y (7) representa los mínimos y máximos técnico de los generadores térmicos, las ecuaciones (8) y (9) representan los mínimos y máximos de los generadores distribuidos que pueden ubicar en cualquier nodo candidato a óptimo, las ecuaciones (10) y (11) representan los flujos por las líneas eléctricas, finalmente las ecuaciones (12) y (13) muestra la variable binaria que incorpora las unidades de generación  $w_i$  y las unidades

máximas que se pueden incorporar al sistema  $U_{max}$  y sus límites de generación respectivamente, con este y los modelos convexos que se mostrarán posteriormente se obtendrá el despacho de energía que minimizará al máximo las pérdidas del sistema de distribución, esta potencia de pérdidas es la mencionada función objetivo que se debe minimizar con el modelo de optimización.

### **3.4 Análisis de la no linealidad del modelo flujo de potencia óptimo**

El modelo OPF-NL es no lineal, debido a las ecuaciones (4) y (5) que representan la inyección de potencia activa y reactiva en cada nodo, las ecuaciones (12) y (13) tiene variable binaria por la cual el sistema se vuelve no lineal entero mixto que es difícil de resolver. Generalmente dentro de la literatura científica estos tipos de problemas de optimización resuelven con meta heurística, sin embargo, para la operación en corto plazo se necesita algoritmos rápidos y que tenga unicidad en las soluciones es decir que siempre encuentre un óptimo global.

### **3.5 Propiedades matemáticas para la convexidad de funciones no lineales**

Para abordar el problema de análisis de no linealidad, se tiene en cuenta algunas definiciones matemáticas que es de bastante importancia [13]. La optimización convexa es un subcampo de la optimización que estudia problemas de minimizar las funciones sobre los conjuntos convexos. La convexidad hace que la optimización sea más fácil que en el caso general, ya que el mínimo local es también un mínimo global y las condiciones de primer orden son suficientes para el problema.

### **3.6 Definición uno conjunto convexo**

Según el autor [14] se dice que es un conjunto convexo  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  es convexo si para cualquier punto  $x, y \in \Omega$  existe un  $z$  en la cual pertenece al conjunto ( $z \in \Omega$ ) dado por la ecuación (14).

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in \Omega \quad (14)$$

### **3.7 Definición dos conjunto convexo**

Un cono  $C$  no vacío es un cono si  $x \in C$  implica que  $\alpha x \in C$  para cualquier escalar  $\alpha \geq 0$ . Si además  $C$  es convexo se dice que es un cono convexo. [14]

### 3.8 Definición tres función convexa

Según el autor [14] Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $\Omega$  es un conjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$ . La función  $f$  se dice que es convexa en  $\Omega$  si para cualquier par de puntos  $x, y$  y cualquier escalar  $\lambda$  que cumpla  $0 \leq \lambda \leq 1$ , se tiene en la ecuación (15):

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (15)$$

### 3.9 Formulación matemática de modelos convexos

El modelo de aproximación basado en el cálculo de Wirtinger del problema de optimización de la ecuación 4 y 5 del problema OPF-NL puede describirse como:

$$s_k^* - d_k^* = \sum_m y_{km} w_{km} \quad (16)$$

$$w_{km} = v_k^* v_m \quad (17)$$

Donde  $w_{km}$  es la nueva variable compleja, esta ecuación puede ser linealizada en el plano complejo alrededor del punto  $u_k, u_m$ , mediante el cálculo de Wirtinger, obteniendo lo siguiente en la ecuación (18):

$$w_{km} - u_k^* u_m = u_k^* (v_m - u_m) + u_m (v_k^* - u_k^*) \quad (18)$$

Siendo  $u_k = u_m = 1pu$  resultando en la siguiente restricción afín:

$$w_{km} = v_k^* + v_m - 1 \quad (19)$$

La ecuación (19) constituye una linealización convexa la ecuación del flujo de potencia. A continuación, la formulación matemática del problema de optimización basada en el cálculo de Wirtinger.

$$\min \text{real} \left( \sum_k \sum_m y_{km} v_k v_m^* \right) \quad (20)$$

$$v_0 = 1 + j0 \quad (21)$$

$$\delta \geq \|v_k - 1\|_1, \forall k \in \mathcal{N} \quad (22)$$

$$p_k^{\max} \geq \text{real}(s_k) \geq p_k^{\min}, \forall k \in \mathcal{N} \quad (23)$$

$$s_k^{\max} \geq \|s_k\|, \forall k \in \mathcal{N} \quad (24)$$

$$i_{km}^{\max} \geq \|y_{km}(v_k - v_m)\|, \forall (km) \in \mathcal{E} \quad (25)$$

$$s_k^* - d_k^* = \sum_m y_{km} w_{km}, \forall k \in \mathcal{N} \quad (26)$$

$$w_{km} = v_k^* + v_m - 1, \forall (km) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \quad (27)$$

Donde  $*$  representa el conjugado convexo,  $s_k$  es la potencia nodal generada, y  $d_k$  es la carga correspondiente. En favor de una representación compacta del modelo y siguiendo la metodología descrita en [15], se asume que los subíndices  $m$  y  $k$  pertenecen al conjunto de nodos en todos los casos. El modelo se presenta en una variable compleja, por ejemplo, se representa la ecuación (22). en el dominio complejo; esto es sólo una representación ya que la ecuación requiere ser separado en partes reales e imaginarias. Aunque el problema puede considerar diferentes objetivos, la aplicación en esta investigación consiste en minimizar las pérdidas de potencia dadas por la ecuación (16).

### 3.10 Modelo basado en la aproximación cónica de segundo orden

El autor [16] mencionan que, una aproximación cónica de segundo orden es una forma conveniente de incluir las ecuaciones de flujo de potencia en un modelo de optimización, partiendo de la ecuación (17), multiplicando por  $w_{km}^*$  se obtiene la ecuación siguiente:

$$w_{km} w_{km}^* = (v_k^* v_m)(v_k v_m^*) \quad (28)$$

Que se puede reescribir como:

$$\|w_{km}\|^2 = \|v_k\|^2 \|v_m\|^2 \quad (29)$$

Definiendo como nuevo vector  $H \in \mathbb{R}^n$  con entradas  $h_k = \|v_k\|^2$  la ecuación (29) se transforma en:

$$\|w_{km}\|^2 = h_k h_m \quad (30)$$

En cuanto a la restricción anterior, aún no es convexa, debido a aquello, se realiza una aproximación que transforma la igualdad en desigualdad y así resuelva el conjunto hiperbólico resultante.

$$\left\| \begin{pmatrix} 2w_{km} \\ h_k - h_m \end{pmatrix} \right\| \leq h_k + h_m \quad (31)$$

Los límites de potencia por las líneas se representan como:

$$S_{km} = Y_{km}(h_k - w_{km}) \quad (32)$$

Existe una amplia literatura sobre aproximaciones de conos de segundo orden, destacando el trabajo presentado por [17] y [18] en sus partes 1 y 2 respectivamente. Una revisión completa del problema de relajación convexa se muestra en [19]. Esta revisión incluye linealizaciones y aproximaciones cónicas. A continuación, la formulación matemática del problema de optimización basada aproximación cónica de segundo orden:

$$\min \text{real} \left( \sum_k s_k - d_k \right) \quad (33)$$

$$h_0 = 1 \quad (34)$$

$$(1 + \delta)^2 \geq h_k \geq (1 - \delta)^2, \forall k \in \mathcal{N} \quad (35)$$

$$p_k^{\max} \geq \text{real}(s_k) \geq p_k^{\min}, \forall k \in \mathcal{N} \quad (36)$$

$$s_k^{\max} \geq \|s_k\|, \forall k \in \mathcal{N} \quad (37)$$

$$i_{km}^{\max} \geq \|y_{km}(h_k - w_{km})\|, \forall (km) \in \mathcal{E} \quad (38)$$

$$s_k^* - d_k^* = \sum_m y_{km} w_{km}, \forall k \in \mathcal{N} \quad (39)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2w_{km} \\ h_k - h_m \end{pmatrix} \right\| \leq h_k + h_m, \forall (km) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \quad (40)$$

En este caso, se convexifica la ecuación de flujo de potencia manteniendo la no linealidad. En este modelo, se calcula la potencia de pérdidas como la suma de las potencias nodales.

A continuación se detalla el sistema de distribución tipo radial para el desarrollo de esta investigación, se toma los datos de líneas a partir de los autores [20], este sistema cuenta con 15 nodos 2 generadores y 14 demanda tanto activa como reactiva como se muestran en la Figura 2.

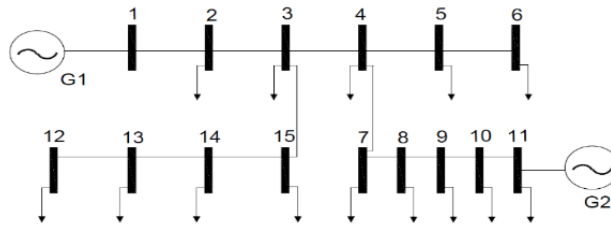


FIGURA 2. Sistema de distribución radial IEEE 15 nodos [21]

Para un estudio más completo de la evaluación de los modelos convexos en sistemas de distribución se realizó con la curva de la demanda de 12 horas. La Figura 3 muestra el periodo de la evaluación de la demanda.

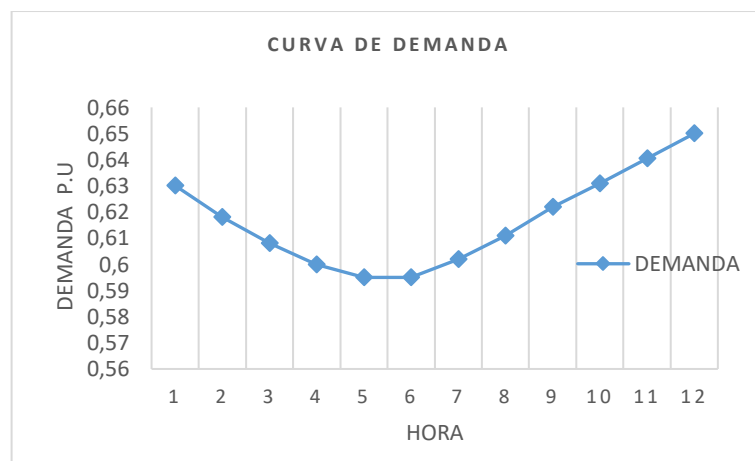


FIGURA 3. Curva de demanda 12 horas

En las Tabla 1 se muestra los datos de límites de generación de las unidades que se encuentran en el sistema IEEE 15 nodos.

Tabla 1. Límites de generación

Unidades	$P_{m\acute{a}x}$	$P_{m\acute{i}n}$	$Q_{m\acute{a}x}$	$Q_{m\acute{i}n}$
G1	4.0	0	3.0	0
G2	0.1	0	0.25	0
<i>Unidades adicionales</i>				
G3	0.1	0	0	--
G4	0.1	0	0	--
G5	0.1	0	0	--

En la Tabla 2 se muestra la demanda de potencia activa en p.u, para cada nodo del sistema se tiene 12 medidas que corresponden a las horas.

**Tabla 2.** Demanda de potencia activa en 12 horas

<b>Demanda Potencia Activa p.u</b>							
<b>Hora</b>	<b>N2</b>	<b>N3</b>	<b>N4</b>	<b>N5</b>	<b>N6</b>	<b>N7</b>	<b>N8</b>
<b>1</b>	0.0208	0.0495	0.0958	0.0422	0.0133	0.0638	0.0323
<b>2</b>	0.0180	0.0450	0.0900	0.0400	0.0140	0.0650	0.0350
<b>3</b>	0.0150	0.0400	0.0840	0.0380	0.0150	0.0680	0.0380
<b>4</b>	0.0140	0.0360	0.0770	0.0350	0.0160	0.0710	0.0420
<b>5</b>	0.0160	0.0320	0.0720	0.0320	0.0170	0.0730	0.0450
<b>6</b>	0.0200	0.0290	0.0680	0.0300	0.0180	0.0750	0.0480
<b>7</b>	0.0300	0.0260	0.0650	0.0290	0.0190	0.0770	0.0500
<b>8</b>	0.0400	0.0250	0.0630	0.0280	0.0200	0.0780	0.0520
<b>9</b>	0.0500	0.0250	0.0620	0.0280	0.0210	0.0790	0.0530
<b>10</b>	0.0550	0.0260	0.0620	0.0290	0.0220	0.0800	0.0540
<b>11</b>	0.0600	0.0280	0.0620	0.0300	0.0230	0.0810	0.0545
<b>12</b>	0.0630	0.0310	0.0620	0.0320	0.0240	0.0820	0.0550
<b>Hora</b>	<b>N9</b>	<b>N10</b>	<b>N11</b>	<b>N12</b>	<b>N13</b>	<b>N14</b>	<b>N15</b>
<b>1</b>	0.0213	0.0280	0.2170	0.0132	0.0029	0.0161	0.0139
<b>2</b>	0.0220	0.0290	0.2100	0.0140	0.0040	0.0170	0.0150
<b>3</b>	0.0230	0.0300	0.2030	0.0150	0.0050	0.0180	0.0160
<b>4</b>	0.0240	0.0310	0.1960	0.0160	0.0060	0.0190	0.0170
<b>5</b>	0.0250	0.0320	0.1890	0.0170	0.0070	0.0200	0.0180
<b>6</b>	0.0260	0.0330	0.1820	0.0180	0.0080	0.0210	0.0190
<b>7</b>	0.0270	0.0340	0.1750	0.0190	0.0090	0.0220	0.0200
<b>8</b>	0.0280	0.0350	0.1680	0.0200	0.0100	0.0230	0.0210
<b>9</b>	0.0290	0.0360	0.1610	0.0210	0.0110	0.0240	0.0220
<b>10</b>	0.0300	0.0370	0.1540	0.0220	0.0120	0.0250	0.0230
<b>11</b>	0.0310	0.0380	0.1470	0.0230	0.0130	0.0260	0.0240
<b>12</b>	0.0320	0.0390	0.1400	0.0240	0.0140	0.0270	0.0250

De la misma forma, en la Tabla 3 se muestra la demanda de potencia reactiva que se considera para el desarrollo de la investigación, de igual forma para un periodo de 12 horas, los datos presentados son aleatorios los cuales representan la variabilidad de la demanda.

**Tabla 3.** Demanda de potencia activa en 12 horas

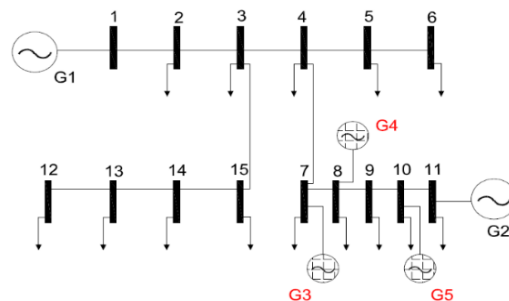
<b>Demanda Potencia Reactiva p.u</b>							
<b>Hora</b>	<b>N2</b>	<b>N3</b>	<b>N4</b>	<b>N5</b>	<b>N6</b>	<b>N7</b>	<b>N8</b>
<b>1</b>	0.0021	0.0051	0.0098	0.0045	0.0012	0.0066	0.0033
<b>2</b>	0.0019	0.0046	0.0091	0.0041	0.0013	0.0067	0.0036
<b>3</b>	0.0017	0.0041	0.0085	0.0039	0.0014	0.0069	0.0039
<b>4</b>	0.0016	0.0037	0.0078	0.0036	0.0015	0.0072	0.0043
<b>5</b>	0.0017	0.0033	0.0073	0.0033	0.0016	0.0074	0.0046
<b>6</b>	0.0021	0.0030	0.0069	0.0031	0.0017	0.0076	0.0049
<b>7</b>	0.0031	0.0026	0.0066	0.0030	0.0018	0.0078	0.0051
<b>8</b>	0.0041	0.0025	0.0064	0.0029	0.0019	0.0079	0.0053
<b>9</b>	0.0051	0.0025	0.0063	0.0029	0.0020	0.0080	0.0054
<b>10</b>	0.0056	0.0026	0.0063	0.0030	0.0021	0.0081	0.0055
<b>11</b>	0.0061	0.0029	0.0063	0.0031	0.0022	0.0082	0.0056
<b>12</b>	0.0064	0.0031	0.0063	0.0033	0.0023	0.0083	0.0056

Hora	N9	N10	N11	N12	N13	N14	N15
1	0.0020	0.0029	0.0022	0.0014	0.0003	0.0016	0.0014
2	0.0021	0.0030	0.0021	0.0015	0.0004	0.0017	0.0015
3	0.0022	0.0031	0.0020	0.0016	0.0005	0.0018	0.0016
4	0.0023	0.0032	0.0019	0.0017	0.0006	0.0019	0.0017
5	0.0024	0.0033	0.0018	0.0018	0.0007	0.0020	0.0018
6	0.0025	0.0034	0.0017	0.0019	0.0008	0.0021	0.0019
7	0.0026	0.0035	0.0016	0.0020	0.0009	0.0022	0.0020
8	0.0027	0.0036	0.0015	0.0021	0.0010	0.0023	0.0021
9	0.0028	0.0037	0.0014	0.0022	0.0011	0.0024	0.0022
10	0.0029	0.0038	0.0013	0.0023	0.0012	0.0025	0.0023
11	0.0030	0.0039	0.0012	0.0024	0.0013	0.0026	0.0024
12	0.0031	0.0040	0.0011	0.0025	0.0014	0.0027	0.0025

#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El resultado de problema de optimización convexa tomando en cuenta tres unidades de generación distribuida, los datos del modelo de IEEE de 15 nodos y la demanda de la potencia reactiva y activa mostradas en las Tablas 2 y 3. La simulación se realiza en un periodo de 12 horas utilizando el solver Knitro y una computadora Intel(R) Core(TM) i7-8565U CPU @ 1.80GHz 1.99 GHz. Los resultados se muestran a continuación:

La Figura 4 muestra la ubicación óptima de las 3 unidades de generación distribuida, que son los nodos 7, 8 y 10 respectivamente, minimizando las pérdidas de la red con un valor de 0,00731149 p.u y 0,00744715 p.u para los modelos convexos, Wirtinger y segundo orden cónico respectivamente.

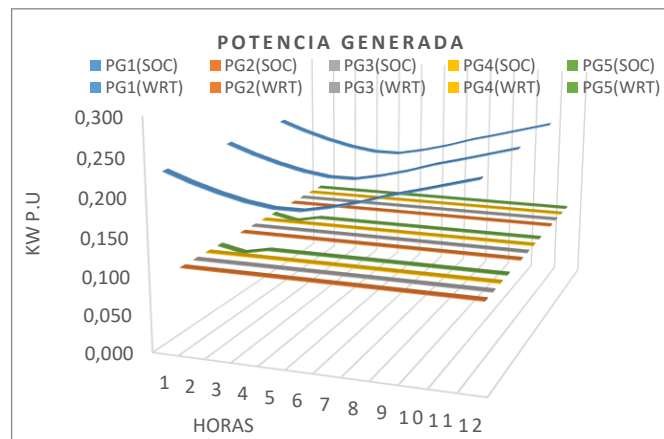


**FIGURA 4.** Sistema de distribución radial IEEE 15 nodos, incorporando nuevas unidades de generación.

En la Figura 5 el valor de la función objetivo del modelo OPF-NL es de 0,00757788 p.u., es similar a los valores obtenidos por los modelos convexos. Esto demuestra

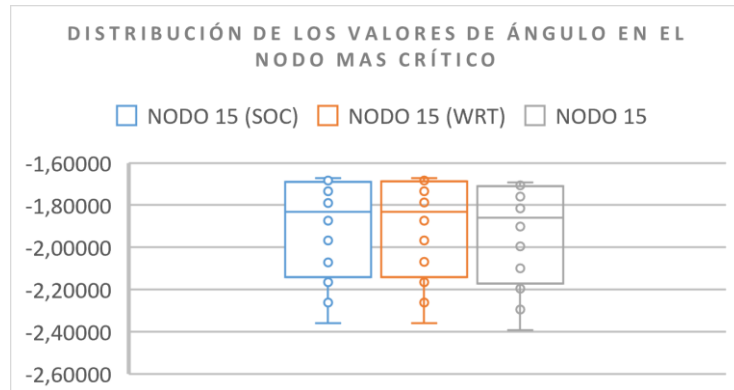
que el modelo OPF-NL proporciona una aproximación precisa. Sin embargo, hay una diferencia entre estos modelos. Aunque el modelo OPF-NL produce resultados muy cercanos a los obtenidos por los modelos convexos, estos últimos tienen la ventaja de encontrar el óptimo global de manera consistente. La capacidad de los modelos convexos para identificar la mejor solución posible en un contexto específico los hace superiores en términos de exactitud y fiabilidad.

Debido a que es un sistema multihorario, la cantidad de datos es considerable, por lo que el análisis de calidad de los datos se realizará en el nodo más crítico o nodo que presenta el mayor rango de error absoluto en comparación con el modelo no convexo.



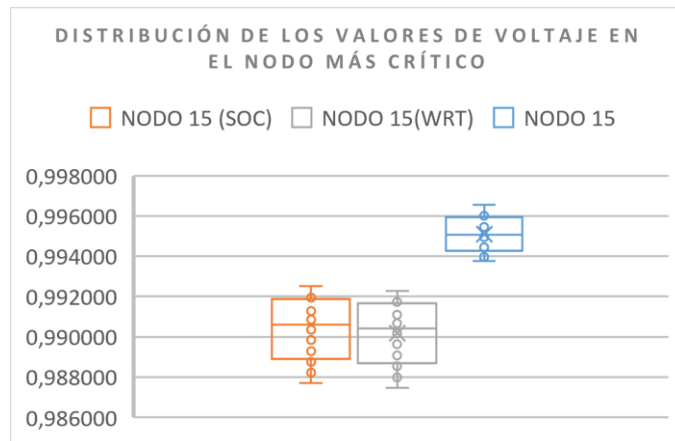
**FIGURA 5.** Potencia activa generada por las centrales en 12 horas. Despacho de energía de modelos: No convexo, convexo basado en el cálculo de Wirtinger y Convexo basado en segundo orden cónico.

El nodo más crítico que presentan los modelos es el nodo 15 por lo tanto, se analiza la calidad de la respuesta enfocándose en los datos obtenidos en ese nodo para los modelos convexos, en la Figura 6 muestra la distribución de valores de ángulos para las horas establecidas, donde se observa que existe una distribución uniforme que se encuentra, y se encuentra dentro de los límites superior e inferior, además de la ausencia de valores atípicos en los valores de ángulo.



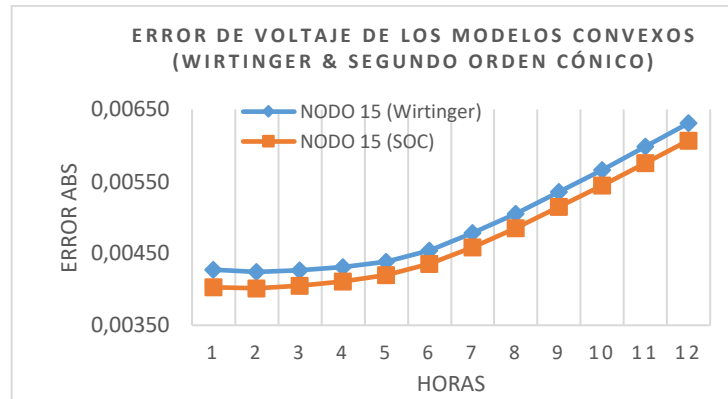
**FIGURA 6.** Distribución de ángulos del segundo orden cónico , Wirtinger y modelo no convexo en un periodo de 12 horas en el nodo más crítico.

De la misma manera, se muestra en la Figura 7 los datos de voltaje en el nodo 15, siendo esta una distribución uniforme resaltando que el modelo no convexo presenta la distribución de datos más uniforme que los modelos convexos.



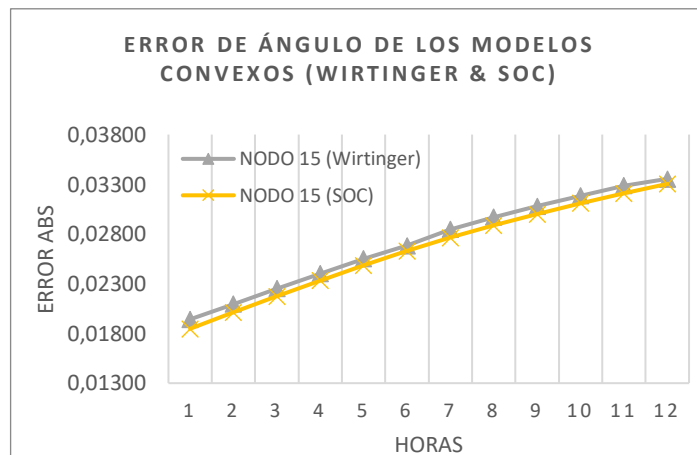
**FIGURA 7.** Distribución de voltajes del segundo orden cónico, Wirtinger y modelo no convexo en un periodo de 12 horas en el nodo más crítico.

Para la evaluación específica de los modelos convexos, existe cierto rango de error entre los resultados del modelo OPF-NL evaluados frente a los modelos convexos. Por lo tanto en la Figura 8 muestra el error absoluto que existe en los datos del nodo 15. Para el modelo convexo basado en el cálculo de Wirtinger, se observa un error que oscila entre 0.00427 y 0.00631 de voltaje. Mientras que, el modelo convexo del segundo orden cónico se observa un error que oscila entre 0,004025 y 0,06070 p.u.



**FIGURA 8.** Error absoluto en voltaje de los modelos convexos frente al modelo no convexo en el nodo más crítico.

El análisis de los ángulos a partir de la Figura 9, muestra que el modelo convexo basado en el cálculo de Wirtinger muestra un error absoluto que oscila entre 0,01942 y 0,03355 grados, mientras que el modelo cónico de segundo orden tiene un error que oscila desde 0,01847 y 0,03304 grados.



**FIGURA 9.** Error absoluto en ángulo de los modelos convexos frente al modelo no convexo en el nodo más crítico.

La Tabla 4 muestra la potencia de pérdidas para cada caso, el modelo basado en el cálculo de Wirtinger mediante su metodología convexa logra obtener para un periodo de 12 horas una potencia de pérdidas total de 0,00734619 p.u en un tiempo de 8,12 segundos mientras que el modelo cónico de segundo orden obtiene una potencia de pérdidas de 0,00744715 p.u en un tiempo de 17,8 segundos.

**Tabla 4.** Resultados de la simulación para los distintos modelos

<i>Tipo</i>	<i>Modelo no convexo</i>	<i>Modelo Wirtinger</i>	<i>Modelo Segundo Orden Cónico</i>
<i>Potencia de Pérdida p.u</i>	0,00731149	0,00734619	0,00744715
<i>Tiempo(segundos)</i>	2,97	8,12	17,8

## 5. CONCLUSIONES

El problema de convexidad de los sistemas eléctricos aborda enfoques diferentes que permiten el desarrollo de metodologías que reduzcan los tiempos y recursos del procesador, por lo que es importante evaluar la calidad de los datos obtenidos por las distintas metodologías o modelos convexos, garantizando unicidad en las soluciones esto es ventajoso comparando a los modelos tradiciones de programación matemática y ayuda a la operación de las redes eléctricas, dicho esto se logra concluir que mediante esta investigación se evidencia el desempeño de las metodologías no convexa, es decir cuál es la más rápida en solucionar el problema y el error que existen con respecto al modelo no lineal.

En principio el problema de optimización no convexo muestra una función objetivo de 0,00731149 p.u. en base a este modelo se midió el error absoluto asociado a los métodos convexos presentados en el documento, en el cual se obtuvo para el modelo convexo basado en el cálculo de Wirtinger una función objetivo de 0,00734619 en un tiempo de 8,12 segundos, teniendo esta metodología una diferencia de 0,000034 p.u llegando a obtener un error porcentual en voltaje de 0,63% y de ángulo 1,40%. Mientras que modelo basado en aproximación de cono de segundo orden con un valor objetivo de 0,00744715 p.u en un tiempo de 17,8 segundos tiene una diferencia de 0,0001357 p.u llegando a tener un error porcentual de voltaje de 0,61% y de ángulo 1,38%, por lo tanto, se puede concluir que el modelo Wirtinger proporciona una solución rápida con un margen de error aceptable, sin embargo, el modelo convexo de segundo orden cónico proporcionará una solución con un margen de error más pequeño sin embargo esto duplicaría el tiempo de solución.

La investigación centrada en modelos convexos es un paso más hacia el desarrollo de nuevas metodologías que optimizan los tiempos y recursos utilizados para hallar una solución, esto a largo plazo beneficiará al sector eléctrico ya que la evaluación de estos modelos concluye que el modelo convexo usando el cálculo de Wirtinger converge en un tiempo más corto, con lo cual se podrían tener consideraciones al momento de requerir una solución rápida y se optaría por la metodología planteada en la presente investigación. Es importante tener en cuenta el crecimiento constante del sector eléctricos y los recursos renovables disponibles, por lo que se recomienda para futuras investigaciones modelos estocásticos en conjunto de modelos convexos que permita simular la intermitencia de los recursos.

## 6. REFERENCIAS

- [1] D. A. Dias Tamayo and A. Garcés Ruiz, “Despacho económico en sistemas de potencia considerando estabilidad transitoria,” *Revista Tecnura*, vol. 21, no. 51, p. 27, 2017, doi: 10.14483/udistrital.jour.tecnura.2017.1.a02.
- [2] J. María and Luis Alfonso, “Flujo de potencia óptimo usando el método del gradiente para reducción de pérdidas en sistemas de potencia,” *Ing Cienc*, vol. 4, pp. 71–85, 2008.
- [3] P. E. Oñate Y and J. M. Ramírez A, “SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE COORDINACIÓN HIDROTÉRMICA DE CORTO PLAZO POR ALGORITMOS GENÉTICOS,” *Revista Técnica “Energía,”* vol. 5, no. 1, 2009, doi: 10.37116/revistaenergia.v5.n1.2009.239.
- [4] Z. Yuan and M. R. Hesamzadeh, “Second-order cone AC optimal power flow: convex relaxations and feasible solutions,” *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*, vol. 7, no. 2, pp. 268–280, 2019, doi: 10.1007/s40565-018-0456-7.
- [5] D. A. Ramirez and A. Garcés, “A Wirtinger Linearization for the Power Flow in Microgrids,” in *2019 IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM)*, 2019, pp. 1–5. doi: 10.1109/PESGM40551.2019.8973647.
- [6] A. J. Martínez-Peralta, “Wirtinger’s Calculus for the Load Flow in Power Distribution Grids,” *2018 IEEE ANDESCON, ANDESCON 2018 - Conference Proceedings*, 2018, doi: 10.1109/ANDESCON.2018.8564691.

- [7] F. R. Cabezas Soldevilla and F. Alfredo Cabezas Huerta, “Minimization of Losses in Power Systems by Reactive Power Dispatch using Particle Swarm Optimization,” *2019 54th International Universities Power Engineering Conference, UPEC 2019 - Proceedings*, 2019, doi: 10.1109/UPEC.2019.8893527.
- [8] U. Leeton and D. Uthitsunthorn, “Power loss minimization using optimal power flow based on particle swarm optimization,” in *ECTI-CON2010: The 2010 ECTI International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology*, 2010, pp. 440–444.
- [9] K. Muttaqi and M. Negnevitsky, “Distributed generation for minimization of power losses in distribution systems,” in *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, 2006, p. 8 pp. doi: 10.1109/PES.2006.1709179.
- [10] A. Anwar and H. R. Pota, “Loss reduction of power distribution network using optimum size and location of distributed generation,” in *AUPEC 2011*, 2011, pp. 1–6.
- [11] A. D. T. Le and M. A. Kashem, “Optimal distributed generation parameters for reducing losses with economic consideration,” *2007 IEEE Power Engineering Society General Meeting, PES*, pp. 1–8, 2007, doi: 10.1109/PES.2007.386058.
- [12] A. I. Javier Martínez-Peralta and Y. I. Eugenia Llosas-Albuerne, “Técnicas para la ubicación óptima de generación distribuida en redes de distribución de energía eléctrica,” *Dominiodelasciencias.Com*, vol. 8, no. 1, pp. 503–520, 2022.
- [13] C. Q. Caiza and J. X. Toaza, “Un modelo de optimización convexo para minimizar las pérdidas de energía en los sistemas de distribución A convex optimization model for energy losses minimization in distribution systems .,” *Ciencias de la Ingeniería y Aplicadas*, vol. 5, no. 2, pp. 114–124, 2021.
- [14] Stephen Lieven, *Convex Optimization*. Los Angeles: United States of America by Cambridge University Press, New York, 2013.
- [15] A. Garcés-Ruiz, *Mathematical programming for power systems operation: from theory to applications in Python*. 2022. doi: 10.1002/9781119747291.fmatter.
- [16] A. Garcés-Ruiz, *Mathematical programming for power systems operation: from theory to applications in Python*. 2022. doi: 10.1002/9781119747291.fmatter.

- [17] S. H. Low, “Convex Relaxation of Optimal Power Flow—Part I: Formulations and Equivalence,” *IEEE Trans Control Netw Syst*, vol. 1, no. 1, pp. 15–27, 2014, doi: 10.1109/TCNS.2014.2309732.
- [18] S. H. Low, “Convex relaxation of optimal power flow-part II: Exactness,” *IEEE Trans Control Netw Syst*, vol. 1, no. 2, pp. 177–189, 2014, doi: 10.1109/TCNS.2014.2323634.
- [19] D. K. Molzahn and I. A. Hiskens, “A Survey of Relaxations and Approximations of the Power Flow Equations,” *Foundations and Trends® in Electric Energy Systems*, vol. 4, no. 1–2, pp. 1–221, 2019, doi: 10.1561/31000000012.
- [20] A. Gopi and P. A.-D.-V. Raj, “Distributed generation for line loss reduction in radial distribution system,” in *2012 International Conference on Emerging Trends in Electrical Engineering and Energy Management (ICETEEEM)*, 2012, pp. 29–32. doi: 10.1109/ICETEEEM.2012.6494439.
- [21] A. Gopi and P. A.-D.-V. Raj, “Distributed generation for line loss reduction in radial distribution system,” in *2012 International Conference on Emerging Trends in Electrical Engineering and Energy Management (ICETEEEM)*, 2012, pp. 29–32. doi: 10.1109/ICETEEEM.2012.6494439.